CONTROL ÓPTIMO
EN ECONOMÍA

David Martín de Diego (CSIC)

Seminar on geometric techniques
in control theory
Barcelona, 12-15 February 2002

Teoría del control óptimo en Economía

Economía a tiempo t **:** $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$

Variables de control o de decisión:

$$u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$$

Leyes económicas que gobiernan el comportamiento de la economía:

$$\dot{x} = f(t, x, u)$$

Dada una condición inicial $x(0) = x_0$, para diferentes elecciones de controles tenemos diferentes evoluciones de nuestra economía. Pero, obviamente, no todas las evoluciones son igualmente deseables. Se supone, que las diferentes alternativas dan lugar a diferentes "utilidades". A cada control y cada estado asociado le asignamos el número real:

$$J = \int_0^T L(t, x(t), u(t))\, dt$$

En economía, como en ingeniería, los controles no pueden variar libremente y es frecuente que aparezcan restricciones de desigualdad. Por ejemplo, un control podría ser la fracción de inversión dedicada al sector a:

$$0 \leq u_a(t) \leq 1$$

Frecuentemente $u \in U \subseteq \mathbb{R}^m$.

Problemas con intervalo de tiempo fijado:

$x(0) = x_0$, T **fijado.**

a) $x^i(T) = x_1^i$, $1 \leq i \leq l$,

b) $x^i(T) \geq x_1^i$ $l + 1 \leq i \leq r$

c) $x^i(T)$ **libre,** $r + 1 \leq i \leq n$

Principio del máximo de Pontryagin

$$H(t,x,p,u) = p_0 L(t,x,u) + p \cdot f(t,x,u)$$

Si $(x^*(t), u^*(t))$ **una solución óptima entonces existe una constante** p_0 **y** $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t))$ **tal que:**

- $(p_0, p(t)) \neq (0, \mathbf{0})$
- $u^*(t)$ **maximiza** $H(t, x^*(t), p(t), u^*(t))$ **para todo** $u \in U$
- $\dot{p_i} = -\dfrac{\partial H}{\partial x^i}(t, x^*(t), p(t), u^*(t))$
- **a)** $p_i(T)$ **libre,** $1 \leq i \leq l$**,**

  b) $p_i(T) \geq 0 (= 0$ **si** $x^{i*}(T) > x^i(T))$**,** $l+1 \leq i \leq r$

  c) $p_i(T) = 0$**,** $r+1 \leq i \leq n$

Ejemplo: EL CICLO DEL "NEGOCIO POLÍTICO"

W. D. Nordhaus: *The Polytical Bussiness cycle*, **Review of Economic Studies, April 1976, 169-190.**

- U **nivel de desempleo**
- q **nivel de inflación**

Reacción de los votantes ante los valores de U **y de** q **se mide con la función de voto**

$$v = v(U,q), \qquad \frac{\partial v}{\partial U} < 0 \text{ y } \frac{\partial v}{\partial q} < 0$$

$$q = \phi(U) + a\pi \quad (\phi' < 0,\ 0 < a \leq 1)$$

donde π **denota la inflación esperada.**

$$\dot{\pi} = b(q - \pi)$$

Maximizar	$\displaystyle\int_0^T v(U, \phi(U) + a\pi) e^{rt}\, dt$
ecuaciones de estado	$\dot{\pi} = b(q - \pi)$
condiciones de frontera	$\pi(0) = \pi_0, \quad \pi(T)$ **libre**

Slide 7

$$\begin{aligned} v(U, q) &= -U^2 - hq \qquad (h > 0) \\ q &= (j - kU) + a\pi \end{aligned}$$

Maximizar	$\displaystyle\int_0^T (-U^2 - hj + hkU - ha\pi) e^{rt}\, dt$
ecuaciones de estado	$\dot{\pi} = b[j - kU - (1 - a)\pi]$
condiciones de frontera	$\pi(0) = \pi_0, \quad \pi(T)$ **libre**

El hamiltoniano de Pontryagin es

$$H(t, \pi, p, U) = (-U^2 - hj + hkU - ha\pi)e^{rt} + pb[j - kU - (1 - a)\pi]$$

Maximizando H con respecto a la variable U

$$\frac{\partial H}{\partial U} = (-2U + hk)e^{rt} - pbk = 0$$

Slide 8

$$U^*(t) = \frac{1}{2}k(h - \lambda b e^{-rt})$$

La ecuación de coestado es:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \pi} = hae^{rt} + pb(1-a)$$

$$\dot{p} - b(1-a)p = hae^{rt}$$

$$p(t) = Ae^{b(1-a)t} + \frac{ha}{r - b + ab}e^{rt}$$

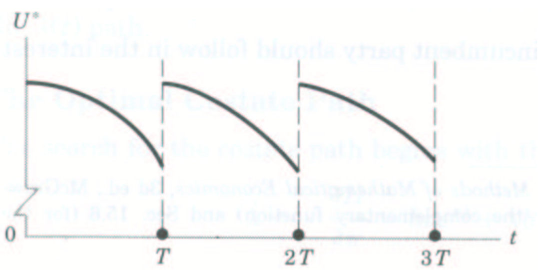
Como $\pi(T)$ es libre, entonces $p(T) = 0$.

$$p(t) = \frac{ha}{r-b+ab}[e^{rt} - e^{(r-b+ab)T + b(1-a)t}]$$

Slide 9

$$U^*(t) = \frac{hk}{2(r-b+ab)}[(r-b) + bae^{(r-b+ab)(T-t)}]$$

$$\left(\frac{dU^*}{dt} = -\frac{1}{2}khbae^{r-b+ab)(T-t)} < 0\right)$$



Slide 10

Condiciones suficientes

Imponiendo adecuadas condiciones de concavidad o convexidad de las funciones se pueden obtener condiciones suficientes de optimalidad.

Sea $(x^*(t), u^*(t))$ **una solución óptima y sea** $(x(t), u(t))$ **una solución admisible entonces:**

$$\Delta = \int_0^T L(t, x^*(t), u^*(t))\, dt - \int_0^T L(t, x(t), u(t))\, dt \geq 0$$

Supongamos que $p_0 = 1$**. Entonces, usando**

$$L(t, x, u) = H(t, x, p, u) - p_i f^i(t, x, u)$$

entonces

$$\Delta = \int_0^T \left[H(t, x^*, p, u^*) - H(t, x, p, u)\right]\, dt - \int_0^T p \cdot (\dot{x}^* - \dot{x})\, dt$$

Suponiendo que H **es concava, como función de** x **y** u**:**

$$\begin{aligned} &H(t, x, p, u) - H(t, x^*, p, u^*) \\ &\quad \leq \frac{\partial H}{\partial x}(t, x^*, p, u^*) \cdot (x - x^*) + \frac{\partial H}{\partial u}(t, x^*, p, u^*) \cdot (u - u^*) \end{aligned}$$

Como $\dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(t, x^*, p, u^*)$**. entonces**

$$\Delta \geq \int_0^T \left[\dot{p} \cdot (x - x^*) + p(\dot{x} - \dot{x}^*)\right]\, dt + \int_0^T \frac{\partial H}{\partial u}(t, x^*, p, u^*) \cdot (u - u^*)\, dt$$

De la concavidad se deduce que si

$$\forall u \in U, \quad \frac{\partial H}{\partial u}(t, x^*, p, u^*) \cdot (u^* - u) \geq 0$$

entonces se satiface la condición de maximalidad del hamiltoniano.

$$
\begin{aligned}
\Delta &\geq \int_0^T \left[\dot{p} \cdot (x - x^*) + p(\dot{x} - \dot{x}^*)\right] \, dt \\
&\geq \int_0^T \frac{d}{dt} \left[p \cdot (x - x^*)\right] \, dt = p(T) \cdot (x(T) - x^*(T)) \geq 0
\end{aligned}
$$

Condición suficiente de Mangasarian

Sea $(x^*(t), u^*(t))$ una solución admisible.

U convexo y $\partial f^i/\partial u_a$ existen y son continuas

Si existe $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t))$ tal que

- $\dot{p}_i = \dfrac{\partial H}{\partial x^i}(t, x^*, p, u^*)$
- $\displaystyle\sum_{a=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial u_a}(u_a^* - u_a) \geq 0$
- **a)** $p_i(T)$ **libre,** $1 \leq i \leq l$**,**

  b) $p_i(T) \geq 0$ **(**$= 0$**, si** ${x^i}^*(T) > x^i(T)$**)** $l + 1 \leq i \leq r$

  c) $p_i(T) = 0$**,** $r + 1 \leq i \leq n$
- $H(t, x, p, u)$ **es cóncava en** (x, u)

entonces $(x^*(t), u^*(t))$ es una solución óptima.

Condición suficiente de Arrow

Sea $(x^*(t), u^*(t))$ **una solución admisible.**

U **conexo y** $\partial f/\partial u$ **existe y es continua.**

Si existe $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t))$ **tal que**

- $\dot{p}_i = \dfrac{\partial H}{\partial x^i}(t, x^*, p, u^*)$
- $H(t, x^*, p, u) \leq H(t, x^*, p, u^*)$ **para todo** u
- **a)** $p_i(T)$ **libre,** $1 \leq i \leq l$,
  b) $p_i(T) \geq 0$ **(**$= 0$**, si** ${x^i}^*(T) > x^i(T)$**),** $l + 1 \leq i \leq r$
  c) $p_i(T) = 0$, $r + 1 \leq i \leq n$
- $\bar{H}(t, x, p) = \max\limits_u H(t, x, p, u)$ **existe y es cóncavo en** x

entonces $(x^*(t), u^*(t))$ **es una solución óptima.**

Saltos en las variables de estado

Supongamos que la variable x **tiene un salto en** $\tau \in [0, T]$**. Sean** $x(\tau^+)$ **y** $x(\tau^-)$ **los límites por la derecha y por la izquierda, respectivamente.**

Magnitud del salto es:

$$x(\tau^+) - x(\tau^-)$$

Se supone que el controlador conoce el número de saltos y su localización temporal:

$$\tau_1, \ldots, \tau_j, \ldots, \tau_k$$

en el intervalo $[0, T]$ **y controla los saltos eligiendo parámetros de control** v^j**,** $1 \leq j \leq k$**.**

$$x^i(\tau_j^+) - x^i(\tau_j^-) = g^i(x(\tau_j^-), v^j, \tau_j)$$

con $g^i(x, 0, t) = 0$**.**

Entre los saltos se supone que:

$$\dot{x}^i = f^i(x, u, t)$$

Condición inicial: $x(0^-) = x_0$

Condiciones terminales:

a) $x^i(T^+) = x^i_T$, $1 \leq i \leq l$,

b) $x^i(T^+) \geq x^i_T$, $l + 1 \leq i \leq r$

c) $x^i(T^+)$ **libre,** $r + 1 \leq i \leq n$

Existe un coste asociado a cada salto:

$$h(x(\tau_j^-), v^j, \tau_j)$$

con $h(x, 0, t) = 0$.

$$\int_0^T L(x(t), u(t), t)\, dt + \sum_{j=1}^{k} h(x(\tau_j^-), v^j, \tau_j)$$

$(x(t), u(t), \tau_1, \ldots, \tau_k, v^1, \ldots, v^k)$ **colección admisible**

Principio del máximo para saltos en las variables de estado

Sea $(x^*(t), u^*(t), \tau_1^*, \ldots, \tau_k^*, \bar{v}^1, \ldots, \bar{v}^k))$ **una colección óptima, entonces existen** p_0 **y** $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t))$ **tal que**

- $(p_0, p(T^+)) \neq (0, \mathbf{0})$
- $\dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x^i}(t, x^*, p, u^*)$ **excepto en los puntos de discontinuidad de** $x^*(t)$ **y** $p(t)$**.**
- $H(t, x^*, p, u) \leq H(t, x^*, p, u^*)$ **para todo** u **y para los puntos en los que no hay saltos de** $x^*(t)$
- $p_0 = 0$ **o** $p_0 = 1$
- **a)** $p_i(T^+)$ **libre,** $1 \leq i \leq l$,

  b) $p_i(T^+) \geq 0$ **(**$= 0$ **si** $x^*(T^+) > x_T$**,** $l + 1 \leq i \leq r$

  c) $p_i(T^+) = 0$, $r + 1 \leq i \leq n$
- **En los puntos** $\tau_1^*, \ldots, \tau_k^*$**:**

$$p_i(\tau_j^{*+}) - p_i(\tau_j^{*-}) = -p_0 \frac{\partial h(x^*(\tau_j^{*-}), \bar{v}^j, \tau_j^*)}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{n} p_k(\tau_j^{*-}) \frac{\partial g^k(x^*(\tau_j^{*-}), \bar{v}^j, \tau_j^*)}{\partial x^i}$$

- $$\sum_{\alpha=1}^{n}\left[p_0\frac{\partial h(x^*(\tau_j^{*-}),\bar{v}^j,\tau_j^*)}{\partial v_\alpha}+\sum_{l=1}^{n}p_i(\tau_j^{*-})\frac{\partial g_l(x^*(\tau_j^{*-}),\bar{v}^j,\tau_j^*)}{\partial v_\alpha}\right]\cdot(\bar{v}_\alpha^j-v_\alpha)\geq 0$$

  para todo $(v_1,\ldots,v_s)\in V$

- $$\sum_{\alpha=1}^{s}\left[p_0\frac{\partial h(x^*(t),0,t)}{\partial v_\alpha}+\sum_{l=1}^{n}p_i(t)\frac{\partial g^i(x^*(t),0,t)}{\partial v_\alpha}\right]\cdot v_\alpha\leq 0$$

Slide 19

Ejemplo: (Extracción óptima de un recurso natural)

$\bar{x}$ **cantidad del recurso a tiempo** 0

$x(t)$ **cantidad del recurso que queda a tiempo** t**.**

$q(t)$ **precio en el mercado del recurso.**

c **coste de producción unitario**

r **tasa de descuento**

Tiempo de planificación $[0,T]$ **fijo**

$$\textbf{máx}\ \left\{\int_0^T(q(t)-c)u(t)e^{-rt}\,dt+\sum_{j=1}^{k}(q(\tau_j)-c)e^{-r\tau_j}v^j\right\}$$
$$\dot{x}(t)=-u(t),\quad x(0^-)=\bar{x},\quad x(T^+)\geq 0$$
$$x(\tau_j^+)-x(\tau_j^-)=-v^j$$
$$u(t)\in[0,+\infty),v^j\in[0,+\infty)$$

con $q(t)-c>0$**.**

Slide 20

Robert Dorfman: "An Economic Interpretation of Optimal Control Theory", 1969, American Economic Review, pág. 817–831

$$\textbf{Maximizar} \qquad \int_{t_0}^{t_1} L(x,u,t)\,dt$$

$$\dot{x} = f(x,u,t)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1$$

$$V(x_0,x_1,t_0,t_1) = \textbf{sup } \{\int_{t_0}^{t_1} L(x(t),u(t),t) : (x(t),u(t)) \quad \textbf{admisible}\}$$

es la función *valor óptimo***.**

$$\frac{\partial V}{\partial x_i^0} = p_i(t_0)$$

Control óptimo con ligaduras unilaterales

$$\int_0^T L(t,x(t),u(t)\;dt$$

$$\dot{x}^i(t) = f^i(t,x(t),u(t))$$

$x(0) = x_0$, T **fijado.**

$$g^\alpha(t,x(t),u(t)) \geq 0, \qquad 1 \leq \alpha \leq s$$

Consideremos el problema sin restricciones.

$$H(t,x,p,u) = p_0 L(t,x,u) + p_i \cdot f^i(t,x,u)$$

$$\forall u \in U, \quad H(t,x^*(t),p(t),u^*(t)) \geq H(t,x^*(t),p(t),u(t))$$

Lagrangiano o hamiltoniano generalizado

$$L(t,x,p,u,q) = H(t,x,p,u) + q_\alpha \cdot g^\alpha(t,x,u)$$

$q_\alpha(t)$ **es el multiplicador asociado a la ligadura** g^α

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u_k}(t, x^*(t), p(t), u(t), q(t)) &= 0 \\ q(t)\cdot g(t, x(t), u(t)) &= 0, \qquad q(t) \geq 0 \end{aligned}$$

+ condición de cualificación de las restricciones

$x^*(t), u^*(t), p(t)$ **y** $q(t)$ **resuelven**

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= \frac{\partial L}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial L}{\partial x^i} \end{aligned}$$

Sea $I\!R^n$, definimos los cuadrantes

$$\begin{array}{rcl} H^0 & = & I\!R^n \\ H^1 & = & \{(x^1,\dots,x^n)\in I\!R^n \mid x^1\geq 0\} \\ H^2 & = & \{(x^1,\dots,x^n)\in I\!R^n \mid x^1\geq 0, x^2\geq 0\} \\ \dots & = & \dots \\ H^n & = & \{(x^1,\dots,x^n)\in I\!R^n \mid x^1\geq 0, x^2\geq 0,\dots,x^n\geq 0\} \end{array}$$

Para cada $x\in X$, hay un abierto U_x de x y un abierto de $W_x\subset H^i$, para agún i, $0\leq i\leq n$, y un homeomorfismo $\varphi : U_x\to W_x$;

$x\in\delta X$ si para alguna elección de $\varphi : U_x\to W_x$, como antes, se verifica que $\varphi_x\in\delta H^i$, e interior en otro caso.

Si $v\in T_xX$ cumple que existe una curva $c\in C^1(X)$ tal que $c(0)=x$ y $\dot{c}(0)=v$, entonces se dice que v es un vector tangente interior a x. Al conjunto de dichos vectores se le llama vectores tangentes interiores $(TX)^i$. Se tien que $T_xX=$ lin $(TX)^i$.

Sea X un variedad con esquinas, espacio de estados, y U una variedad con esquinas, tal que $U\to X$ sea una submersión suprayectiva.

Sea $L : C\to I\!R$ la función de coste y $f : C\to TX$ las ecuaciones de estado.

El problema de control de control está definido en $T^*X\times_X U$ con hamiltoniano de Pontryagin $H=L+p_if^i$ La condiciones del máximo de Pontryagin se reescriben

$$i_Z\left(i_Y\omega_X-dH\right)\geq 0 \text{ donde } z\in T^i(T^*X\times_X U)$$

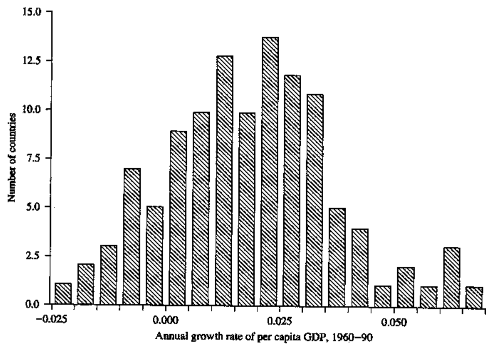
$$M_1=\{(x,p,u^*)\in T^*X\times_X U \;/\; u^*(t) \text{ maximiza } H(t,x^*(t),p(t),u^*(t))\}$$

Teorías de crecimiento económico óptimo

"La finalidad de una economía no es el aumento físico de los bienes sino la satisfacción máxima de las necesidades humanas"

Carl Menger, *Principles of Economics*, **1871)**

En 1776 Adam Smith se preguntó por la naturaleza y causas de las riquezas de las naciones.



Modelos de crecimiento económico estudian la evolución temporal de las variables macroeconómicas fijándose en las tendencias a largo plazo.

- Teorías de crecimiento económico. ¿cómo crecerá la economía?
- Teorías de crecimiento económico óptimo. ¿como debería crecer?

Modelo neoclásico de crecimiento económico. Solow-Swan 1956

1. $Y = F(K, L)$, $\begin{cases} F \text{ homogénea de grado 1} \\ \partial^2 F/\partial L^2 < 0, \qquad \partial^2 F/\partial K^2 < 0 \\ (F(K,L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}) \text{ Cobb-Douglas} \end{cases}$
2. $Y(t) = C(t) + I(t)$
3. $I(t) = \dot{K}(t) + \mu K(t)$
4. $L(t) = L(0)e^{\eta t}$

$$\begin{cases} Y(t) = L(t)F(1, \frac{K(t)}{L(t)}) = L(t)f(k(t)) \\ k(t) = \frac{K(t)}{L(t)} \\ y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)} \\ y(t) = f(k(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{\dot{K}L - \dot{L}K}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - \eta\frac{K}{L} \\ \frac{\dot{K}}{L} = \dot{k} + \eta k \end{cases}$$

$$y(t) - c(t) = \dot{k} + \eta k + \mu k$$

Ecuación fundamental del crecimiento económico

$$\dot{k} = f(k) - \lambda k - c, \quad \lambda = \eta + \mu$$

En el modelo de Solow-Swan se cierra el modelo añadiendo una ecuación describiendo el comportamiento del consumidor:

$$C(t) = (1 - s)(Y(t) - \mu K(t))$$

Tasa de consumo es una fracción constante de la producción neta.

$$\dot{k} = sf(k) - \lambda^* k \qquad \textbf{donde} \qquad \lambda^* = s\mu + \eta$$

¿Qué cantidad de consumo debemos hacer en cada instante del tiempo de modo que se maximiza cierto objetivo satisfaciendo siempre la ecuación fundamental?

$$J_T = \int_0^T u(c(t))e^{-\delta t}\, dt$$

u **es una función de utilidad asociada al "representante individual" de la sociedad.**

$$u'(c) > 0 \qquad u''(c) < 0, \qquad c \geq 0$$

$$\begin{aligned} &\textbf{máx} \int_0^T u(c(t))e^{-\delta t}\, dt \\ &\dot{k} = f(k) - \lambda k - c \end{aligned}$$

$$f'' < 0 < f' \qquad\qquad u'' < 0 < u'$$

$$H(t, k, p, u) = u(c)e^{-\delta t} + p(f(k) - \lambda k - c)$$

$$\begin{cases} \dot{k} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = f(k) - \lambda k - c \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial k} = -p(f'(k) - \lambda) \end{cases}$$

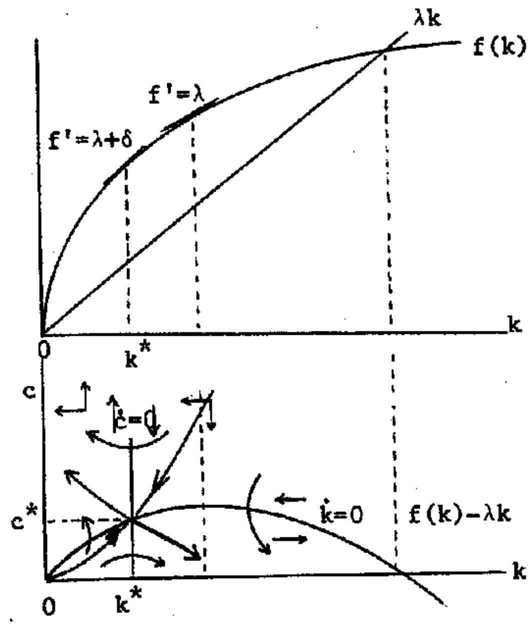
$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 = u'(c)e^{\delta t} - p \;\;\Rightarrow\;\; p = u'(c)e^{-\delta t}$

$\dot{p} = u''(c)\dot{c}e^{-\delta t} - \delta u'(c)e^{-\delta t}$

$$\dot{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)}(f'(k) - (\lambda + \delta)$$

$$\begin{cases} \dot{k} = f(k) - \lambda k - c \\ \dot{c} = -\dfrac{u'(c)}{u''(c)}(f'(k) - (\lambda + \delta)) \end{cases}$$

Slide 33



Slide 34

En (k^*, c^*)

$$J(k^*, c^*) = \begin{pmatrix} f'(k^*) - \lambda & -1 \\ -\frac{u'(c^*)}{u''(c^*)} f''(k^*) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & -1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

con $\rho > 0$ **y** $\alpha < 0$. **Punto de silla**

Crecimiento óptimo con una función objetivo lineal

$$\begin{aligned} J_T &= \int_0^\infty c(t) e^{-\delta t}\, dt, \qquad \delta > 0 \\ \dot{k} &= f(k) - \lambda k - c, \quad c \geq 0, \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

Llamando $s(t)$ **a la propensión al ahorro**

$$s(t) = \frac{Y - C}{Y} = \frac{f(k) - c}{f(k)}$$

$$c = (1 - s) f(k)$$

$$
\begin{aligned}
J_T &= \int_0^T (1-s)f(k)e^{-\delta t}\,dt, \qquad \delta > 0 \\
\dot{k} &= sf(k) - \lambda k, \quad 0 \le s \le 1, k \ge 0
\end{aligned}
$$

Características del problema:

- **función objetivo lineal en el control**
- **ecuación de estado lineal en el control**
- **control en un intervalo cerrado**

$$
H(t,k,p,s) = e^{-\delta t}(1-s)f(k) + p(sf(k) - \lambda k)
$$

$$
\begin{aligned}
&\dot{k} = sf(k) - \lambda k \\
&\dot{p} = -\left[e^{-\delta t}(1-s)f'(k) + p(sf'(k) - \lambda)\right] \\
&H \text{ **maximizado con respecto a** } s \\
&\lim_{t \to +\infty} p(t) = 0
\end{aligned}
$$

Para simplificar, $q = pe^{\delta t}$

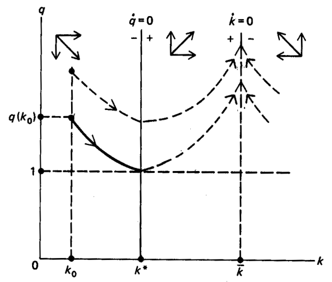
$$
\begin{aligned}
&\dot{k} = sf(k) - \lambda k \\
&\dot{q} = (\lambda + \delta)q - [1 + (q-1)s]\, f'(k)
\end{aligned}
$$

La condición de maximización:

$$
\max_s \,(q-1)s, \qquad s \in [0,1]
$$

Caso 1 $q > 1,\ s = 1$

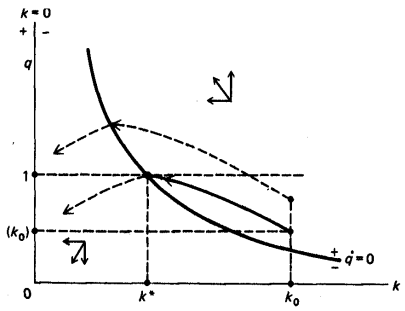
$$\dot{k} = sf(k) - \lambda k$$
$$\dot{q} = (\lambda + \delta) - f'(k))q$$



Slide 39

Caso 2 $q < 1,\ s = 0$

$$\dot{k} = -\lambda k$$
$$\dot{q} = (\lambda + \delta)q - f'(k)$$



Slide 40

Problemas de control no-autónomos

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t, x, u), \quad 1 \le i \le m, \qquad\qquad L(t, x, u)$$

$x^0 \equiv t$

$$\frac{dx^0}{d\tau} = 1, \quad \frac{dx^i}{d\tau} = f^i(x^0, x, u), \quad 1 \le i \le m,$$

$\tilde{\mathbf{L}}(x^0, x, u) = \mathbf{L}(x^0, x, u)$

Una formulación alternativa: nuevo control v y un nuevo estado x_0:

$$\frac{dx^0}{d\tau} = v, \quad \frac{dx^i}{d\tau} = v f^i(x^0, x, u, v), \quad 1 \le i \le m,$$

$\tilde{\mathbf{L}}(x^0, x, u, v) = v\mathbf{L}(x^0, x, u)$

P. Michel: On the transversality condition in infinite horizon optimal problems. *Econometrica* **50 (4) (1982), 975–985.**

Slide 41

$$\begin{tikzcd}
\tilde{C} = I\!R^2 \times C \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & T(I\!R \times B) \arrow[dl, "\tau_{I\!R \times B}"] \\
& I\!R \times B &
\end{tikzcd}$$

donde

$$\tilde{f} = v\frac{\partial}{\partial x^0} + f^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad 1 \le i \le m.$$

Crecimiento óptimo con capital humano

$$Y(t) = K(t)^\alpha H(t)^\beta (A(t)L(t))^{1-\alpha-\beta}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad \alpha + \beta < 1$$

donde Y es el output, K capital físico, H capital humano, A nivel de tecnología y L el trabajo. L crece a una tasa constante η. Se supone $A(t) = aK(t)^\mu H(t)^{1-\mu}$ donde a es constante.

Slide 42

$$Y(t) = C(t) + I_K + I_H = C(t) + s_K Y(t) + s_H Y(t)$$

dondeI_K **e** I_H **son las inversiones brutas en capital físico y humano, y** C **es el consumo.**

$$\begin{aligned}\dot{K}(t) &= I_K - \delta_K K = s_K Y(t) - \delta_K K \\ \dot{H}(t) &= I_H - \delta_H H = s_H Y(t) - \delta_H H,\end{aligned}$$

$$y(t) = \tilde{a} k^{1-\tilde{\beta}} h^{\tilde{\beta}},$$

y

$$\dot{k}(t) = s_K y(t) - (\delta_K + \eta) k(t), \quad \dot{h}(t) = s_H y(t) - (\delta_H + \eta) h(t).$$

Función de utilidad:

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta}.$$

Slide 43

$$\mathbf{max} \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta}\, dt\ ,$$

donde $c = (1 - s_K - s_H) y$**.**

$$Ł(t, h, k, s_K, s_H) = e^{-\rho t} \frac{\left[(1 - s_K - s_H) \tilde{a} k^{1-\tilde{\beta}} h^{\tilde{\beta}}\right]^{1-\theta}}{1-\theta}.$$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= v \\ \frac{dk}{d\tau} &= v s_k \tilde{a} k^{1-\tilde{\beta}} h^{\tilde{\beta}} - v(\delta_K + \eta) k \\ \frac{dh}{d\tau} &= v s_H \tilde{a} k^{1-\tilde{\beta}} h^{\tilde{\beta}} - v(\delta_H + \eta) h,\end{aligned}$$

Slide 44

y la función de coste

$$\tilde{\mathbf{Ł}}(x,h,k,v,s_K,s_H) = ve^{-\rho x}\frac{\left[(1-s_K-s_H)\tilde{a}k^{1-\tilde{\beta}}h^{\tilde{\beta}}\right]^{1-\theta}}{1-\theta},$$

$$(\Phi_s)(x,h,k,v,s_K,s_H) = (x+s, e^{\frac{\rho s}{1-\theta}}k, e^{\frac{\rho s}{1-\theta}}h, v, s_K, s_H)$$

es una simetría.

$$Y = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\rho k}{1-\theta}\frac{\partial}{\partial k} + \frac{\rho h}{1-\theta}\frac{\partial}{\partial h}$$

$$Y^C(\tilde{\mathbf{Ł}}) = 0, \quad L_{Y^C}\tilde{f} = 0$$

$$p_x + p_k\frac{\rho k}{1-\theta} + p_h\frac{\rho h}{1-\theta} \quad \textbf{es constante}$$

$$e^{-\rho t}\frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} - p_k\left[s_k\tilde{a}k^{1-\tilde{\beta}}h^{\tilde{\beta}} - (\delta_K+\eta)k\right]$$
$$-p_h\left[s_H\tilde{a}k^{1-\tilde{\beta}}h^{\tilde{\beta}} - (\delta_H+\eta)h\right] + p_k\frac{\rho k}{1-\theta} + p_h\frac{\rho h}{1-\theta} = \textbf{ constante}$$

- Barro, R. J., Sala-i-Martin, X., 1995, Economic Growth, McGraw-Hill, Inc, New York.

- Cass, D., 1965, Optimun growth in an aggregative model of capital accumulation, Review of Economic Studies, 32 (July), 233-240.

-Chiang, A.C., 1992, Elements of Dynamical Optimization (McGraw-Hill, New York).

- Kataoka, H. Hashimoto, H., 1995, New conservation laws in a neoclassical von Neumann model, Journal of Mathematical Economics, 36 (8), 271-280.

- Lucas, R.E., 1988, On the mechanics of economic development, Journal of Monetary Economics 22 (1), 3-42.

- Magill, M.J.P., 1970, On a General Economic Theory of Motion (Springer-Verlag, Berlin).

- Ramsey, F.P., 1928, A mathematical theory of saving, Economic Journal, 38, 543-559.

- Romer, P.M., 1994, The origin of endogenous growth, Journal of

Economic Perspectives 8 (1), 3-22.

- Samuelson, P.A., 1970, Law of conservation of the capital-output ratio, in: Proceedings of the National Academy of Sciences, Applied Mathematical Science, 67, 1477-1479.

- Sato, R., 1981, Theory of Thechnical Change and Economics Invariance: Application of Lie Groups (Academic Press, New York).

- Sato, R., 1994, Optimal Economic Growth. Test of Income-Wealth Conservation Laws in OECD Countries, Working Papers Series No.171, Leonard N. Stern School of Business.

- Sato, R. , Ramachandran, R.V., 1990, Conservation Laws and Symmetry: Applications to Economics and Finance (Kluwer, Boston).

-Seirstad, A., Sydsaeter, K. , Optimal Control Theory with Economic Applications, Advanced textbooks in Economics, North-Holland 1987

-Takayama, A. , Mathematical economics, University Press, Second Edition , 1985.

-Tu, P. N. V., Dynamical Systems. An introduction with applications in economics and biology, Springer-Verlag, Berlín 1994.

- Weitzman, M.L., 1976, On the welfare significance of national product in a dynamical economy, Quaterly Journal of Economics, 90, 156-162.