RESOLUCIÓ:

1 Denotem els esdeveniments $B =$"Hem triat la gallina bona" i $O_k =$"La gallina que hem triat posa k ous". Hem de resoldre l'equació

$$\frac{1}{2} = P(B|O_k).$$

Per Bayes

$$P(B|O_k) = \frac{P(O_k|B)P(B)}{P(O_k|B)P(B) + P(O_k|\bar{B})P(\bar{B})}$$

on $P(B) = P(\bar{B}) = 1/2$, $P(O_k|B) = e^{-\alpha_2}\alpha_2^k/k!$ i $P(O_k|\bar{B}) = e^{-\alpha_2}\alpha_2^k/k!$.

Ens queda l'equació

$$\frac{1}{2} = \frac{e^{-\alpha_2}\alpha_2^k}{e^{-\alpha_2}\alpha_2^k + e^{-\alpha_1}\alpha_1^k}$$

que implica

$$e^{-\alpha_2}\alpha_2^k = e^{-\alpha_1}\alpha_1^k$$

d'on, prenent logaritmes, resulta

$$k = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\ln(\alpha_2) - \ln(\alpha_1)}.$$

(el resultat és aproximat ja que l'expressió anterior no és entera.)

2 $K = 1/2$ i $E[X] = 3$ ja que

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = K\int_0^{\infty} x^2 e^{-x}dx = 2K$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^3 e^{-x}dx = \frac{3!}{2} = 3.$$

Si $p_1 = P(X > 6)$, tenim que, en una mostra de n aerolits la probabilitat que n'hi hagi algun amb $X > 6$ val 1 menys la que tots tinguin $X < 6$. Així imposem

$$0.5 = 1 - (1 - p_1)^n$$

d'on $n = \ln(0.5)/\ln(1 - p_1)$. Com

$$p_1 = \frac{1}{2}\int_6^{\infty} x^2 e^{-x}dx = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 2)e^{-x}|_6^{\infty} = 25e^{-6} = 0.062$$

resulta $n = 10.8$ pel que hem de prendre $n = 11$.

3 Si $a = 0$ Y és constant que és un cas degenerat ($\sigma = 0$) de gaussiana. Per $a \neq 0$ la transformació $y = ax + b$ aplica la recta real sobre si mateixa bijectivament i

$$f_Y(y) = f_X(x)\frac{1}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|a|}\exp\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\}$$

i com $x = (y - b)/a$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|a|}\exp\{-\frac{(y - ma - b)^2}{2\sigma^2 a^2}\}$$

que correspon a una gaussiana amb $m_Y = ma + b$ i $\sigma_Y = \sigma|a|$.