

1. **Resolució:**

Les probabilitats que un caràcter sigui vocal o consonant valen $p_V = 5/26$ i $p_C = 21/26$ respectivament.

- (a) $P(\text{alguna vocal en } N \text{ caràcters}) = 1 - P(\text{cap vocal en } N \text{ caràcters}) = 1 - p_C^N$.
Volem $1 - p_C^N > 0.9 \Rightarrow p_C^N < 0.1 \Rightarrow N \ln p_C < \ln 0.1 \Rightarrow N > \ln 0.1 / \ln p_C = 10.7$.
Llavors ha de ser $N \geq 11$.
- (b) La longitud dels blocs-c és una variable geomètrica (nombre de caràcters fins que surt vocal) amb $p = p_V$. El seu valor mig és $1/p = 5.2$.
Sigui X_c el nombre de blocs-c. Contant els principis de bloc, X_c és igual al nombre de posicions en hi ha una consonant precedida de vocal. Així $E[X_c] = 10^3 \cdot p_V p_C = 155$. (El resultat *exacte* per un text de N caràcters és $E[X_c] = p_C^2 + N p_V p_C$.)
- (c) Indiquem $p(x|+y)$ la probabilitat de tenir tipus x en una posició si a la dreta hi ha tipus y i $p(x|-y)$ la probabilitat de tenir tipus x en una posició si a l'esquerra hi ha tipus y ($x, y = V, C$). Llavors ens demanen $p(V|+V) = 1 - p(C|+V)$. Per Bayes

$$p(C|+V) = \frac{p(V|-C)p_C}{p_V} = \frac{0.22 \cdot 21/26}{5/26} = 0.924$$

d'on $p(V|+V) = 0.076$.

2. **Resolució:**

La forma contínua del teorema de Bayes és

$$f(x|B) = \frac{P(B|X=x)f(x)}{P(B)}$$

Com $P(B|X=x)$ val 1 si $x \in B$ i 0 si $x \notin B$ el resultat queda demostrat.

3. **Resolució:**

- (a) Per una variable exponencial $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$ i $m = \lambda^{-1}$.

$$P(X > m) = \int_{\lambda^{-1}}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_{\lambda^{-1}}^{\infty} = e^{-1},$$

$$P(X < m) = 1 - P(X > m) = 1 - e^{-1}.$$

- (b) Utilitzant el resultat del problema 2

$$f(x|X > m) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-1}}, \quad x > \lambda^{-1}, \quad f(x|X < m) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1 - e^{-1}}, \quad 0 < x < \lambda^{-1}.$$

- (c)

$$m^{(+)} = \int_{\lambda^{-1}}^{\infty} x \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-1}} dx = 2\lambda^{-1}, \quad m^{(-)} = \int_0^{\lambda^{-1}} x \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1 - e^{-1}} dx = \frac{e-2}{e-1} \lambda^{-1},$$

$$\Delta = \frac{2\lambda^{-1} - \frac{e-2}{e-1} \lambda^{-1}}{\lambda^{-1}} = \frac{e}{e-1}.$$