PROBABILITAT I PROCESSOS ESTOCÀSTICS **ETSETB**

Examen Parcial (B) **15 de novembre de 2001**

1. La princesa Pipelina té un jardí ple de granotes. La probabilitat que una d'aquestes granotes es converteixi en un princep fantàstic al fer-li un petó val α. El problema és que hi ha una probabilitat $1/4$ que la granota es converteixi en una bruixa horrible que mati a la princesa.

   Cansada de ser soltera, Pipelina decideix anar petonejant granotes fins a trobar un princep. Per a quins valors de α acabar trobant un princep és més probable que morir en mans de la bruixa?

   Resolució:

   Per que la princesa acabi trobant un princep cal que la primera granota surti princep, o la primera granota no surt res i la segona surt princep, o la primera no surt res, la segona no surt res i la tercera surt princep, etc. Si A és l'esdeveniment "acabar trobant un princep"

$$P(A) = \alpha + (1-\alpha-\frac{1}{4})\alpha + (1-\alpha-\frac{1}{4})^2\alpha + (1-\alpha-\frac{1}{4})^3\alpha + \cdots$$

$$= \alpha\sum_{k=0}^{\infty}(1-\alpha-\frac{1}{4})^k = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha-\frac{1}{4})} = \frac{\alpha}{\alpha+\frac{1}{4}}.$$

   Com eventualment la princesa trobarà un princep o una bruixa, el requisit és $P(A) > 1/2$ que implica

$$\alpha > \frac{1}{4}.$$

   (que és el que, obviament, cal esperar.) Hi ha una restricció adicional que ve de $P($ granota princep $)+P($ granota bruixa $)+P($ granota ordinaria $) = 1$. Llavors també ha de ser $\alpha \leq 3/4$.

2. Un node d'una xarxa té n connexions. Cada connexió, amb independència de les altres, pot estar activada amb probabilitat $p_1 = 2/3$. La probabilitat que el node col·lapsi si té k connexions activades val $k/2n$. Calculeu:

   (a) La probabilitat que el node col·lapsi.

   (b) Si el node està col·lapsat, la probabilitat que hi hagi només dues connexions activades.

   Resolució:

   El nombre de connexions activades és una variable N binomial de paràmetres n, p_1. La seva funció de probabilitat és

$$P_N(k) = \binom{n}{k} p_1^k q_1^{n-k}.$$

   (a) Sigui C l'esdeveniment "node col·lapsat". L'enunciat ens diu que $P(C|N{=}k) = k/(2n)$. Ara, amb la fórmula de la probabilitat total

$$P(C) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2n} P_N(k) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n} k P_N(k) = \frac{1}{2n} E[N] = \frac{1}{2n} n p_1 = \frac{p_1}{2} = \frac{1}{3}.$$

   (b) Bayes:

$$P(N{=}2|C) = \frac{P(C|N{=}2) P_N(2)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{2n}\binom{n}{2} p_1^2 q_1^{n-2}}{p_1/2} = (n-1) p_1 q_1^{n-2} = \frac{2(n-1)}{3^{n-1}}.$$

3. X és una variable aleatòria de Cauchy de paràmetre α. Determineu la funció de densitat de la nova variable $Y = \arctan \frac{X}{\alpha}$.

   Resolució:

   La funció $g(x) = \arctan \frac{x}{\alpha}$ és bijectiva de l'interval $(-\infty, \infty)$ a l'interval $(-\pi/2, \pi/2)$. Per tant, $\Omega_Y = (-\pi/2, \pi/2)$ i

$$f_Y(y) = f_X(x) \frac{1}{|dy/dx|} = \frac{\alpha/\pi}{x^2 + \alpha^2} \frac{1}{\frac{1}{1+(\frac{x}{\alpha})^2} \frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\pi}.$$

   És a dir, Y és uniforme en $(-\pi/2, \pi/2)$.