PROBABILITAT I PROCESSOS ESTOCÀSTICS **ETSETB**

Examen Parcial (A) **18 de novembre de 2002**

1. Un curs de probabilitat té 50 dies de classe. El professor cada dia decideix fer un examen sorpresa amb probabilitat 0.1. Un estudiant hi va cada dia en tren. La probabilitat que una avaria impedeixi a l'estudiant assistir a classe val 0.2.

   (a) Quina és la probabilitat que l'estudiant no es perdi cap examen dels que es fan?

   (b) Quina és la probabilitat que caiguin exactament dos examens durant els 15 primers dies de classe? Calculeu també aquesta probabilitat sabent que en tot el curs es fan dos examens.

   (c) Quina és la probabilitat que l'estudiant hagi fet algun examen abans que el tren falli per primera vegada.

   Resolució:

   (a) Posem $p_E = 0.1$ i $p_T = 0.2$. La probabilitat de no perdre cap examen un dia donat val $1 - p_E P_T$ (el complenentari de perdre'l, cosa que requereix que hi hagi examen i falli el tren. La probabilitat que ens demanen val $(1 - p_E p_T)^{50} = 0.3641$.

   (b) El nombre d'examens que cauen en m dies és binomial m, p_E. Llavors,

$$P(2 \text{ en } 15 \text{ dies }) = \binom{15}{2} 0.1^2 0.9^{13} = 0.2668.$$

$$P(2 \text{ en } 15 \text{ dies} | 2 \text{ en } 50 \text{ dies }) = \frac{P(2 \text{ en } 15 \text{ dies i } 2 \text{ en } 50 \text{ dies })}{P(2 \text{ en } 50 \text{ dies })}$$

$$= \frac{P(2 \text{ en } 15 \text{ dies })P(0 \text{ en } 35 \text{ dies })}{P(2 \text{ en } 50 \text{ dies })} = \frac{\binom{15}{2} 0.1^2 0.9^{13} \cdot 0.9^{35}}{\binom{50}{2} 0.1^2 0.9^{48}} = \frac{\binom{15}{2}}{\binom{50}{2}} = \frac{15 \cdot 14}{50 \cdot 49} = 0.0857.$$

   Hem utilitzat la independència entre el nombre d'examens dels 15 primers dies i el nombre d'examens dels restants 35 dies. Es pot posar directament com a resultat el quocient de binomials ja que fixat el nombre total d'examens l'espai mostral queda reduït a la posició d'aquests.

   (c) $P = P($ algun examen abans de la primera avaria $) = 1 - P($ cap examen abans de la primera avaria $)$. Si denotem $q_E = 1 - p_E$ i $q_T = 1 - p_T$

$$P = 1 - (p_T + q_E q_T p_T + (q_E q_T)^2 p_T + \cdots) = 1 - \frac{p_T}{1 - q_E q_T} = 1 - \frac{0.2}{1 - 0.9 \cdot 0.8} = 0.2857.$$

   S'ha aproximat a la sèrie geomètrica ja que amb 50 dies el promig d'avaries val 10 així que la primera avaria passarà aviat i no hi haura gaire diferència respecte a un nombre infinit de dies. El resultat exacte seria

$$P = 1 - (p_T + q_E q_T p_T + (q_E q_T)^2 p_T + \cdots + (q_E q_T)^{49} p_T + (q_E q_T)^{50})$$

$$= 1 - p_T \frac{1-(q_E q_T)^{50}}{1-q_E q_T} - (q_E q_T)^{50} = 0.2857$$

La diferència respecte l'anterior és de l'ordre de 10^{-8}.

2. El temps que un servidor tarda en processar una comanda és una variable aleatòria exponencial. Podem triar entre dos servidors on el temps mig de procés val 5 segons i 10 segons respectivament, però no sabem quin és quin. Per decidir quin servidor elegim definitivament ens deixen triar-ne un a l'atzar i mesurar el temps T d'un procés.

   (a) Fixem el següent criteri per triar el servidor: si $T < a$ ens quedem el que hem provat mentres que en cas contrari triem l'altre. Calculeu el valor de a que maximitza la probabilitat d'acabar triant el servidor més ràpid. Que val aquesta probabilitat?

   (b) Pel servidor més ràpid el cost del servei depen del temps de procés X i val $c(X)$ on

   $$c(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 5, \\ 2 - \frac{x}{5} & \text{si } 5 < x < 10, \\ 0 & \text{si } x > 10. \end{cases}$$

   Calculeu el valor mitjà del cost.

   (c) Sigui Y la variable aleatòria que dóna el cost en l'anterior apartat. Calculeu i dibuixeu la seva funció de distribució. Indiqueu quins són els punts amb probabilitat no nul·la i doneu les seves probabilitats.

Resolució:

(a) El temps del servidor ràpid és T_1 exponencial amb $\lambda = 1/5$. El temps de l'altre servidor és T_2 exponencial amb $\lambda = 1/10$. Per acabar triant el ràpid, el triem al principi i es verifica temps $< a$ o triem l'altre al principi i es verifica temps $> a$. Denotem P_1 a la probabilitat que ens demanen. Recordem que per una variable exponencial $P(X < a) = F_X(a) = 1 - e^{-\lambda a}$.

$$P_1 = \frac{1}{2}P(T_1 < a) + \frac{1}{2}P(T_2 > a) = \frac{1}{2}(1 - e^{-a/5}) + \frac{1}{2}e^{-a/10}.$$

Per trobar el màxim, $0 = dP_1/da = (\frac{1}{5}e^{-a/5} - \frac{1}{10}e^{-a/10})/2$ que té com a solució $a = 10 \ln 2 = 6.9314$. Substituint aquest valor s'obté $P_1 = 5/8 = 0.625$ que millora el valor 0.5 que teniem a priori.

(b) Teorema de l'espenança i canvi $t = x/5$:

$$E[c(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} c(x) f_X(x) dx = \int_0^5 \frac{1}{5}e^{-x/5}dx + \int_5^{10} (2 - \frac{x}{5})\frac{1}{5}e^{-x/5}dx$$

$$= \int_0^1 e^{-t}dt + \int_1^2 (2-t)e^{-t}dt = 1 - e^{-1} + e^{-2} = 0.7674.$$

(c) Per valors $0 < y < 1$ l'esdeveniment $Y \leq y$ equival a $X \geq 5(2-y)$ que té probabilitat e^{y-2}. L'estudi complet ens dóna:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0, \\ e^{-2} & \text{si } y = 0, \\ e^{y-2} & \text{si } 0 \leq y < 1, \\ 1 & \text{si } y \geq 1. \end{cases}$$

Els punts amb comportament discret són els de discontinuïtat de $F_Y(y)$, $y = 0$ i $y = 1$. Trobem que $P(Y=0) = e^{-2} = 0.1353$ i $P(Y=1) = 1 - e^{-1} = 0.6321$.