PROBABILITAT I PROCESSOS ESTOCÀSTICS **ETSETB**

Examen Parcial (B) **21 de novembre de 2002**

1. Un cleptòman va cada dia a robar al Corte Inglés. En un dia, la probabilitat que se'n surti robant un producte val 0.5 i la probabilitat que l'enganxin i s'acabi la seva carrera val 0.2.

   (a) Quina és la probabilitat que l'enganxin el quart dia sabent que mai aconsegueix fer un robatori amb exit?

   (b) Quina és la probabilitat que acabi la seva carrera havent robat només un producte?

   (c) Si un dia no l'enganxen, quina és la probabilitat que hagi robat un producte? Si l'enganxen durant la tercera setmana quin és el nombre mig de productes robats durant les dues primeres setmanes?

   Resolució:

   Definim $p_R = 0.5$ (robar un producte), $p_E = 0.2$ (ser atrapat), $p_A = 1 - 0.5 - 0.2 = 0.3$ (cap dels anteriors casos).

   (a) Sigui N_E el dia que és atrapat i C l'esdeveniment "no fer mai cap robatori".

   $$P(N_E = 4|C) = \frac{P(N_E = 4 \text{ i } C)}{P(C)} = (1 - p_A)p_A^3 = 0.0189$$

   ja que $P(N_E = 4 \text{ i } C) = p_A^3 p_E$ i $P(C) = p_E + p_A p_E + p_A^2 p_E + \cdots = p_E/(1 - p_A)$.

   (b)

   $$\begin{aligned} P &= p_R p_E + 2p_R p_A p_E + 3p_R p_A^2 p_E + \cdots \\ &= p_R p_E (1 + 2p_A + 3p_A^2 + \cdots) = p_R p_E \frac{d}{dp_a}(1 + p_A + p_A^2 + \cdots) \\ &= p_R p_E \frac{d}{dp_a} \frac{1}{1 - p_A} = \frac{p_R p_E}{(1 - p_A)^2} = 0.2040. \end{aligned}$$

   (c) En un dia, $p(R|\overline{E}) = p_R/(1 - p_E) = 0.625$. Sabent que els 14 primers dies no ha estat atrapat, el nombre de robatoris és binomial amb $n = 14$ i $p = 0.625$ d'on el seu nombre mig val $np = 8.75$.

2. El pic de voltatge que es dóna al llarg d'un dia és una variable aleatòria X, exponencial de valor mitjà 1. Les fonts d'alimentació que utilitzem es caracteritzen per un valor numèric c tal que si $X > c$ la font es crema.

   (a) Quin valor de c hem de triar per tal que la probabilitat que la font no es cremi durant 100 dies sigui major que 0.9?

(b) El preu d'una font de tipus c és $100c$. Si la font es crema, el cost de la reparació és 200. Si només l'hem de fer servir un dia, quin és el valor de c que minimitza la despesa en promig? Que val aquesta despesa promig?

(c) Calculeu la funció de densitat de la variable $Y = e^{\frac{X}{a}}$, on $a > 0$. Per a quins valors de a té Y esperança finita?

Resolució:

X és exponencial amb $\lambda = 1$ d'on $F_X(x) = 1 - e^{-x}$ i $f_X(x) = e^{-x}$.

(a) La probabilitat que la font no es cremi en un dia val $P(X < c) = F_X(c) = 1 - e^{-c}$. La probabilitat que la font no es cremi en 100 dies val $(1 - e^{-c})^{100}$. $(1 - e^{-c})^{100} > 0.9$ implica $c > -\ln(1 - 0.9^{0.01}) = 6.856$.

(b) El cost és una variable aleatòria discreta que val $100c$ amb probabilitat $P(X < c) = 1 - e^{-c}$ i $100c + 200$ amb probabilitat $P(X > c) = e^{-c}$. El seu promig val $100c(1 - e^{-c}) + (100c + 200)e^{-c} = 100c + 200e^{-c}$. Derivant i igualant a 0 trobem el mínim en $c = \ln 2 = 0.6931$. El cost promig queda $100 \ln 2 + 100 = 169.3$.

(c) Com $\Omega_X = [0, \infty)$, tenim que $\Omega_Y = [1, \infty)$. Per $y > 1$ la correspondència és un a un i $dy/dx = a^{-1} e^{\frac{x}{a}}$. Utilitzant també $e^x = y^a$, trobem que per $y > 1$

$$f_Y(y) = f_X(x) \frac{1}{|dy/dx|} = \frac{e^{-x}}{a^{-1} e^{\frac{x}{a}}} = \frac{a}{y^{a+1}}.$$

L'esperança de Y val $a \int_1^\infty \frac{dy}{y^a} = \frac{a}{a-1}$ sempre que $a > 1$. Per $a \leq 1$ és divergent.