

1. A un centre de comunicacions arriben n línies de tipus 1, n línies de tipus 2 i n línies de tipus 3. Certa operació de control requereix triar a l'atzar tres del total de línies entrants. Tenim tres indicadors: A s'encen si hem triat alguna línia de tipus 1, B si n'hem triat alguna de tipus 2, i C si n'hem triat alguna de tipus 3.
 - (a) Quina és la probabilitat que estiguin encesos els tres indicadors?
 - (b) Quina és la probabilitat que només estigui encès l'indicador A ? Quin és el límit d'aquesta i l'anterior probabilitat quan $n \rightarrow \infty$?
 - (c) Fixeu $n = 10$ i estudieu la independència dels indicadors A i B .
 - (d) També pel cas $n = 10$: Sabent que hi ha un sol indicador apagat quina és la probabilitat que A estigui encès?

Resolució:

Indiquem els esdeveniments de forma que, per exemple, $A\overline{B}C =$ "A encès, B apagat i C encès", $112 =$ "n'hem triat dues de tipus 1 i una de tipus 2".

(a)

$$P(ABC) = P(123) = \frac{n \cdot n \cdot n}{\binom{3n}{3}} = \frac{n^3}{\frac{3n(3n-1)(3n-2)}{3!}} = \frac{2n^2}{(3n-1)(3n-2)} = \frac{2n^2}{9n^2 - 9n + 2}.$$

(b)

$$P(A\overline{B}C) = P(111) = \frac{\binom{n}{3}}{\binom{3n}{3}} = \frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}}{\frac{3n(3n-1)(3n-2)}{3!}} = \frac{(n-1)(n-2)}{3(3n-1)(3n-2)} = \frac{n^2 - 3n + 2}{27n^2 - 27n + 6}.$$

$\lim P(ABC) = 2/9$ i $\lim P(A\overline{B}C) = 1/27$. Quan n és molt gran les tres seleccions de línia són independents de manera que $P(123) = 3! \cdot (1/3)^3$ i $P(111) = (1/3)^3$.

(c) $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \binom{20}{3} / \binom{30}{3} = 146/203 = 0.719$. $P(B)$ val el mateix per simetria entre tipus de línia. $P(AB) = P(123) + P(112) + P(122) = 10^3 / \binom{30}{3} + 2 \cdot \binom{10}{2} \cdot 10 / \binom{30}{3} = 95/203 = 0.468$. [també es pot fer $P(AB) = 1 - P(\overline{A} \text{ o } \overline{B}) = 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) + P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - 2 \cdot \binom{20}{2} / \binom{30}{3} + \binom{10}{3} / \binom{30}{3}$]

Com $P(AB) \neq P(A)P(B)$, no són independents.

(d)

$$P(A | \text{un apagat}) = 1 - P(\overline{A} | \text{un apagat}) = 1 - \frac{P(\overline{A}BC)}{P(\overline{A}BC) + P(A\overline{B}C) + P(AB\overline{C})} = \frac{2}{3}$$

Lògic. Degut a la simetria entre tipus de línia, sabent que hi han k indicadors encesos la probabilitat que A sigui un d'ells val $k/3$.

2. El consum elèctric en un pis durant un dia és una variable aleatòria X amb funció de densitat

$$f_X(x) = Kxe^{-x/a}, \quad x > 0$$

on a és una constant.

- (a) Determineu la constant K i calculeu la funció de distribució de X .
 (b) En un edifici hi ha 7 pisos independents. En cadascun hi ha un dispositiu que falla quan $X > 3a$. En un dia de funcionament, quina és la probabilitat que algun falli?
 (c) El cost de manteniment del dispositiu per dia val

$$C = \begin{cases} 1 & \text{si } X < a, \\ X/a & \text{si } a < X < 3a, \\ 6 & \text{si } X > 3a. \end{cases}$$

Trobeu la funció de distribució de la variable aleatòria C .

- (d) Calculeu el cost mitjà de manteniment.

Resolució:

Integrant per parts trobem la primitiva $\int xe^{-x/a} dx = -a(x+a)e^{-x/a}$.

- (a) $1 = -Ka(x+a)e^{-x/a}|_0^\infty = Ka^2$ d'on $K = 1/a^2$. Per $x > 0$:

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(x') dx' = -\left(\frac{x'}{a} + 1\right)e^{-x'/a}|_0^x = 1 - \left(\frac{x}{a} + 1\right)e^{-x/a}.$$

- (b) Per un dispositiu la probabilitat de fallar val $p = P(X > 3a) = 1 - F_X(3a) = 4e^{-3} = 0.2$. $P(\text{falli algun de 7}) = 1 - P(\text{ningun falla}) = 1 - (1-p)^7 = 0.7887$.

- (c) Per $c < 1$, $F_C(c) = 0$.

Per $c = 1$, $F_C(1) = P(X < a) = F_X(a) = 1 - 2e^{-1}$.

Per $1 \leq c < 3$, $F_C(c) = P\left(\frac{X}{a} < c\right) = F_X(ac) = 1 - (c+1)e^{-c}$.

Per $3 \leq c < 6$, $F_C(c) = 1 - 4e^{-3}$.

Per $c \geq 6$, $F_C(c) = 1$.

C és una variable mixta. F_C és discontinua en $c = 1$ i en $c = 6$.

- (d) Pel teorema de l'esperança:

$$\begin{aligned} E[C] &= \int_0^a 1 \cdot f_X(x) dx + \int_a^{3a} \frac{x}{a} f_X(x) dx + \int_{3a}^\infty 6 f_X(x) dx \\ &= F_X(a) + I + 6(1 - F_X(3a)) = 1 + 3e^{-1} + 7e^{-3} = 2.4521 \end{aligned}$$

ja que $F_X(a) = 1 - 2e^{-1}$, $I = \int_a^{3a} \frac{x^2}{a^3} e^{-x/a} dx = \int_1^3 t^2 e^{-t} dt = 5e^{-1} - 17e^{-3}$ i $1 - F_X(3a) = 4e^{-3}$.