

1. Un sistema transmet una successió de símbols binaris  $x_1x_2x_3\dots$ .

En la modalitat  $A$ :  $P(x_1 = 1) = \frac{1}{3}$ . Si  $x_n = 1$ ,  $x_{n+1}$  pren valors 0, 1 equiprobables mentres que si  $x_n = 0$ ,  $x_{n+1}$  val 1 amb probabilitat  $\frac{3}{4}$ .

En la modalitat  $B$ : Els símbols són independents amb valors 0, 1 equiprobables.

- Tirem una moneda justa per elegir la modalitat. Si el segon símbol és un 0, quina és la probabilitat que estem en la modalitat  $B$ ?
- En la modalitat  $A$ , quina és la funció de probabilitat del tercer símbol?
- En la modalitat  $B$ , sigui  $M$  el nombre de uns en els 10 primers símbols, i  $N$  el nombre de uns seguits en la primera aparició del valor 1. Què valen els valors mitjans d'aquestes variables?
- En la modalitat  $A$ . Sigui  $p_n = P(x_n = 1)$ . Trobeu una relació entre  $p_n$  i  $p_{n-1}$ . Què val el límit quan  $n \rightarrow \infty$  de  $p_n$ ?

**Resolució:**

(a)  $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ .  $P(x_2=0|B) = \frac{1}{2}$ .

$P(x_2=0|A) = P(x_2=0|x_1=0)P(x_1=0) + P(x_2=0|x_1=1)P(x_1=1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ .

Per Bayes

$$P(B|x_2=0) = \frac{P(x_2=0|B)P(B)}{P(x_2=0|A)P(A) + P(x_2=0|B)P(B)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = \frac{3}{5}.$$

(b) Ja hem vist que  $P(x_2=0|A) = 1/3$ . Ara

$P(x_3=0|A) = P(x_3=0|x_2=0)P(x_2=0) + P(x_3=0|x_2=1)P(x_2=1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{12}$ .

$P(x_3=1|A) = P(x_3=1|x_2=0)P(x_2=0) + P(x_3=1|x_2=1)P(x_2=1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{12}$ .

(c)  $M$  és binomial amb  $n = 10$  i  $p = 1/2$ , d'on  $E[M] = np = 5$ .

$N$  és geomètrica amb  $p = 1/2$ , d'on  $E[N] = 1/p = 2$ .

(d)  $p_n = P(x_n = 1|x_{n-1} = 0)P(x_{n-1} = 0) + P(x_n = 1|x_{n-1} = 1)P(x_{n-1} = 1) = \frac{3}{4}(1 - p_{n-1}) + \frac{1}{2}p_{n-1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}p_{n-1}$ .

Prenent límits en els dos costats trobem  $p_\infty = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}p_\infty$  d'on  $p_\infty = 3/5$ .

(La solució de l'equació en diferències finites val  $p_n = \frac{16}{15}(-\frac{1}{4})^n + \frac{3}{5}$ .)

2. Considerem una variable aleatòria contínua  $X$  amb  $\Omega_X = [0, a]$  i funció de densitat  $f_X(x) = K(a - x)$  per  $0 < x < a$ .

- (a) Calculeu la constant  $K$ , l'esperança  $E[X]$ , la variància  $V[X]$ , i els moments  $m_n$ .
- (b) Fixeu  $a = 2$ . Calculeu la funció de densitat de  $Y = \sqrt{X}$ .
- (c) Fixeu  $a = 3$ . Calculeu la funció de distribució de  $X$ .
- (d) També pel cas  $a = 3$ . Calculeu i dibuixeu la funció de distribució de  $Z = g(X)$  on

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- (e) Calculeu l'esperança de la variable  $Z$  de l'anterior apartat.

**Resolució:**

(a)  $1 = \int_0^a K(a - x)dx = Ka^2/2$ .  $K = 2/a^2$ .  $m_n = \int_0^a x^n \frac{2}{a^2}(a - x)dx = \frac{2a^n}{(n + 1)(n + 2)}$ .  
 $E[X] = m_1 = a/3$ .  $V[X] = m_2 - m_1^2 = a^2/6 - a^2/9 = a^2/18$ .

(b) La relació és monòtona amb una única solució  $x = y^2$ .  $\Omega_Y = [0, \sqrt{2}]$ ,

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}(2 - x) \frac{1}{1/(2\sqrt{x})} = 2y - y^3, \quad 0 < y < \sqrt{2}.$$

(c)  $F_X(x) = \int_0^x \frac{2}{9}(3 - x')dx' = \frac{6x - x^2}{9}$ ,  $0 \leq x \leq 3$ .

(d) En la gràfica de  $g$  veiem que  $F_Z(z) = 0$  per  $z < 0$  i  $F_Z(z) = 1$  per  $z \geq 1$ . Per  $0 \leq z < 1$

$$F_Z(z) = P(1 - z < X < z + 2) = F_X(z + 2) - F_X(1 - z) = \frac{2z + 1}{3}.$$

És una variable mixta amb discontinuïtat en  $z = 0$  on passa de 0 a  $1/3$ .

(e) Pel teorema de l'esperança  $E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$ .

$$E[Z] = \frac{2}{9} \left\{ \int_0^1 (1 - x)(3 - x)dx + \int_2^3 (x - 2)(3 - x)dx \right\} = \frac{1}{3}.$$