

1. Una perillosa espècie alienígena s'ha infiltrat entre els humans. Constitueixen ja un 5% de la població i són indistingibles dels humans exepete pel fet que la component  $Q$  de la sang té distribució gaussiana amb  $m = 10$ ,  $\sigma = 2$  pels humans mentre que pels àliens és  $m = 12$ ,  $\sigma = 2$ .
  - (a) Un equip exterminador tria persones a l'atzar i desintegra sense més contemplacions aquelles que tenen  $Q > 12$ . Calculeu les probabilitats que una persona exterminada sigui humana i que una persona que hagi passat el test sigui un àlien.
  - (b) Diem que hi ha hagut error si s'extermina un humà o es deixa anar un àlien. Quin és el nombre mig de persones analitzades fins que es produeix el primer error?
  - (c) Un important lider extraterrestre junt als seus dos ajudants es troba dins d'un grup de 14 persones. Volem separar-ne  $k$  triades a l'atzar de forma que la probabilitat que el lider quedi aïllat dels seus ajudants sigui màxima. Calculeu aquesta probabilitat i determineu el valor òptim de  $k$ .
  - (d) De quantes persones ha de ser un grup per tal que la probabilitat de no haver-hi àliens sigui la mateixa que la de haver-n'hi exactament un? Quin és el nombre mig d'àliens en aquest grup?
2. Una variable aleatòria  $X$  amb  $\Omega_X = [0, \infty)$  té funció de densitat

$$f_X(x) = Kx^2e^{-x}, \quad x > 0.$$

- (a) Determineu la constant  $K$  i calculeu la funció de distribució de  $X$ .  
(Indicació: comenceu trobant una primitiva de  $x^2e^{-x}$ .)
- (b) El *coeficient d'esbiaixament*  $\alpha = \mu_3/\sigma^3$  ( $\mu_3$  tercer moment central i  $\sigma$  desviació estàndard) és una mesura de l'asimetria de la funció densitat al voltant de l'esperança. Calculeu els moments  $m_n$  de  $X$  i utilitzeu-los per a obtenir  $\alpha$ .
- (c) Sigui la nova variable  $Y = X^2 - 3X + 2$ . Calculeu  $F_Y(0)$  i  $E[Y]$ .
- (d) Trobeu la funció de densitat de la variable  $Z = e^X$ .

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES!!