PROBABILITAT I PROCESSOS ESTOCÀSTICS **ETSETB**

Examen Parcial (B) **22 de novembre de 2004**

1. Una perillosa espècie alienígena s'ha infiltrat entre els humans. Constitueixen ja un 5% de la població i són indistingibles dels humans exepte pel fet que la component Q de la sang té distribució gaussiana amb $m = 10$, $\sigma = 2$ pels humans mentre que pels àliens és $m = 12$, $\sigma = 2$.

   (a) Un equip exterminador tria persones a l'atzar i desintegra sense més contemplacions aquelles que tenen $Q > 12$. Calculeu les probabilitats que una persona exterminada sigui humana i que una persona que hagi passat el test sigui un àlien.

   (b) Diem que hi ha hagut error si s'extermina un humà o es deixa anar un àlien. Quin és el nombre mig de persones analitzades fins que es produeix el primer error?

   (c) Un important lider extraterrestre junt als seus dos ajudants es troba dins d'un grup de 14 persones. Volem separar-ne k triades a l'atzar de forma que la probabilitat que el lider quedi aillat dels seus ajudants sigui màxima. Calculeu aquesta probabilitat i determineu el valor òptim de k.

   (d) De quantes persones ha de ser un grup per tal que la probabilitat de no haver-hi àliens sigui la mateixa que la de haver-n'hi exactament un? Quin és el nombre mig d'àliens en aquest grup?

   Resolució:

   (a) Segons les dades, si designem àlien com A i humà com H. $P(A) = 0.05$, $P(H) = 0.95$, $P(Q < 12|H) = (1 + \mathrm{erf}((12-10)/(\sqrt{2}\cdot 2)))/2 = 0.5(1+\mathrm{erf}(0.7071)) = 0.8413$, $P(Q > 12|H) = 1 - P(Q < 12|H) = 0.1586$, $P(Q < 12|A) = (1+\mathrm{erf}((10-10)/(\sqrt{2}\cdot 2)))/2 = 0.5(1+\mathrm{erf}(0)) = 0.5$, $P(Q > 12|A) = 0.5$.

   Que una persona exterminada ($Q > 12$) sigui humà:

   $$P(H|Q > 12) = \frac{P(Q > 12|H)P(H)}{P(Q > 12|H)P(H) + P(Q > 12|A)P(A)} = 0.8577.$$

   Que una persona passant el test ($Q < 12$) sigui àlien:

   $$P(A|Q < 12) = \frac{P(Q < 12|A)P(A)}{P(Q < 12|A)P(A) + P(Q < 12|H)P(H)} = 0.0303.$$

   (b) La probabilitat que hi hagi error val $P_e = P(Q < 12|A)P(A)+P(Q > 12|H)P(H) = 0.1757$. El nombre N_t de tests fins que hi ha el primer error és una variable geomètrica. Així, $E[N_t] = 1/P_e = 5.7$.

(c) Hi ha $\binom{14}{k}$ maneres de triar-ne k de 14. Cal que el grup de k contingui el lider i cap ajudant ($\binom{11}{k-1}$ maneres) o que el grup de k contingui els dos ajudants i no el lider ($\binom{11}{k-2}$ maneres). Llavors

$$P = \frac{\binom{11}{k-1} + \binom{11}{k-2}}{\binom{14}{k}} = \frac{\binom{12}{k-1}}{\binom{14}{k}} = \frac{k(14-k)}{14 \cdot 13}$$

que és màxim per $k = 7$.

(d) El nombre d'àliens en un grup de n persones és una variable binomial N_a amb paràmetres $n, P(A)$. Cal que $P(H)^n = nP(A)P(H)^{n-1}$, d'on $n = P(H)/P(A) = 19$. El nombre mig d'àliens val $E[N_a] = nP(A) = 0.95$.

2. Una variable aleatòria X amb $\Omega_X = [0, \infty)$ té funció de densitat

$$f_X(x) = Kx^2e^{-x}, \qquad x > 0.$$

(a) Determineu la constant K i calculeu la funció de distribució de X. (Indicació: comenceu trobant una primitiva de x^2e^{-x}.)

(b) El *coeficient d'esbiaixament* $\alpha = \mu_3/\sigma^3$ (μ_3 tercer moment central i σ desviació estàndard) és una mesura de l'asimetria de la funció densitat al voltant de l'esperança. Calculeu els moments m_n de X i utilitzeu-los per a obtenir α.

(c) Sigui la nova variable $Y = X^2 - 3X + 2$. Calculeu $F_Y(0)$ i $E[Y]$.

(d) Trobeu la funció de densitat de la variable $Z = e^X$.

Resolució:

(a) $\int x^2e^{-x}dx = -(2 + 2x + x^2)e^{-x}$. Ara imposem $1 = \int_0^\infty f_X(x)dx = -K(2 + 2x + x^2)e^{-x}|_0^\infty = 2K$ d'on $K = 1/2$. Ara, per $x \geq 0$

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(x')dx' = -(1 + x' + \frac{x'^2}{2})e^{-x'}|_0^x = 1 - (1 + x + \frac{x^2}{2})e^{-x}.$$

(b) $m_n = E[X^n] = \int_0^\infty x^n f_X(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^{n+2}e^{-x}dx = \frac{(n+2)!}{2}$. L'esperança val $m = m_1 = 3$. $\sigma^2 = m_2 - m^2 = 3$, $\mu_3 = E[(X-3)^3] = E[X^3 - 9X^2 + 27X - 27] = m_3 - 9m_2 + 27m - 27 = 6$. Llavors $\alpha = 6/\sqrt{3}^3 = 2/\sqrt{3}$.

(c) $F_Y(0) = P(Y \leq 0) = P(1 \leq X \leq 2) = F_X(2) - F_X(1) = 5e^{-1}/2 - 5e^{-2} = 0.2430$. $E[Y] = E[X^2 - 3X + 2] = m_2 - 3m + 2 = 5$.

(d) Si $x > 0$, $e^x > 1$. Així $\Omega_Z = [1, \infty)$ i com que $dz/dx = e^x$ i $x = \ln z$, $f_Z(z) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}/e^x = \frac{1}{2}(\ln z/z)^2$.