

1. Tenim dues urnes d'aspecte idèntic. En la urna A hi ha 5 boles blanques i 3 boles negres. En la urna B hi ha 4 boles blanques i 5 boles negres. A més, es tria una urna a l'atzar i s'hi afegeix una bola blanca.
 - (a) Treiem una bola a l'atzar de la urna A . Quina és la probabilitat que sigui negra?
 - (b) Si la bola extreta de la urna A és negra, quina és la probabilitat que la bola addicional anés a parar a la urna A ?
 - (c) Es tria una urna a l'atzar i s'hi extreu una bola. Quina és la probabilitat que sigui blanca?
 - (d) S'extreu una bola de cada urna. Quina és la probabilitat que siguin del mateix color.
 - (e) S'extreu una bola de la urna A (amb reemplaçament) repetidament fins que la bola surt negra. Quin és el nombre mig de vegades que hem fet l'experiment?
 - (f) En l'apartat anterior, quina és la probabilitat que calguin més de 10 extraccions?

Resolució:

Denotem: b_A = 'La bola blanca va a parar a la urna A '. b_B = 'La bola blanca va a parar a la urna B '. $P_A(n)$: probabilitat d'extreure una bola negra de la urna A , etc.

$$(a) P_A(n) = P_A(n|b_A)P(b_A) + P_A(n|b_B)P(b_B) = \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{48} = 0.3541.$$

$$(b) P_A(b_A|n) = \frac{P_A(n|b_A)P(b_A)}{P_A(n)} = \frac{8}{17} = 0.4705.$$

$$(c) P(b) = P_A(b)P(A) + P_B(b)P(B). \text{ On } P(A) = P(B) = \frac{1}{2}, P_A(b) = 1 - P_A(n) = \frac{31}{48} \text{ i } P_B(b) = P_B(b|b_A)P(b_A) + P_B(b|b_B)P(b_B) = \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{36}. \text{ Així: } P(b) = \frac{31}{48} \cdot \frac{1}{2} + \frac{17}{36} \cdot \frac{1}{2} = \frac{161}{288} = 0.5590.$$

$$(d) P(\text{Mateix color}) = (P_A(n|b_A)P_B(n|b_A) + P_A(b|b_A)P_B(b|b_A))P(b_A) + (P_A(n|b_B)P_B(n|b_B) + P_A(b|b_B)P_B(b|b_B))P(b_B) = (\frac{3}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{6}{9} \cdot \frac{4}{9})\frac{1}{2} + (\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{10} + \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{10})\frac{1}{2} = \frac{53}{108} = 0.4907.$$

(e) El nombre de vegades N que fem l'experiment és una variable geomètrica, fixada la configuració de la urna A , amb $p = P_A(n|b_A)$ o $p = P_A(n|b_B)$ segons on vagi la bola blanca addicional.

$$E[N] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{P_A(n|b_A)} + \frac{1}{P_A(n|b_B)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{3} + \frac{8}{3} \right) = \frac{17}{6} = 2.83.$$

(f) Que calguin més de 10 extraccions equival a que a les 10 primeres ha sortit bola blanca. Així: $P(N > 10) = P(N > 10|b_A)P(b_A) + P(N > 10|b_B)P(b_B) = P_A(b|b_A)^{10} \frac{1}{2} + P_A(b|b_B)^{10} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{6}{9} \right)^{10} + \left(\frac{5}{8} \right)^{10} \right) = 0.0132.$

2. El temps de vida d'un dispositiu és una variable aleatòria X exponencial de valor mitjà 50 hores.

- (a) Quina és la probabilitat que el dispositiu duri més de 75 hores?
- (b) Posem en marxa 10 dispositius independents. Passades 200 hores, quina és la probabilitat que quedi algun dispositiu funcionant?
- (c) Un cost en euros associat al dispositiu ve donat per la variable $Y = g(X)$ on:

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 50 \\ 4 - \frac{x}{25} & \text{si } 50 < x < 100 \\ 0 & \text{si } x \geq 100 \end{cases}$$

Calculeu la funció de distribució de la variable aleatòria Y .

- (d) Calculeu l'esperança de Y .

Resolució:

(a) Una variable exponencial té funció de densitat $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ i funció de distribució $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. A més, la seva esperança val $1/\lambda$, d'on $\lambda = 1/50$. Ara, ens demanen:

$$P(X > 75) = 1 - P(X \leq 75) = 1 - F_X(75) = e^{-\frac{75}{50}} = e^{-3/2} = 0.2231.$$

(b) La probabilitat que té cada dispositiu de funcionar passades 200 hores val $P(X > 200) = e^{-4}$. Llavors, la probabilitat que en funcioni algun és complementària de que no en funcioni cap, és a dir, que tots els dispositius no funcionin:

$$P(\text{Algun funciona}) = 1 - P(\text{Cap funciona}) = 1 - P(X < 200)^{10} = 1 - (1 - e^{-4})^{10} = 0.1687.$$

(c) La variable Y només pren valors en l'interval $\Omega_Y = [0, 2]$.

Per $y < 0$, $F_Y(y) = 0$.

En $y = 0$, $F_Y(0) = P(X > 100) = 1 - F_X(100) = e^{-2}$.

Per $0 < y < 2$, $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(4 - \frac{X}{25} \leq y) = P(X \geq 100 - 25y) = e^{-2 + \frac{y}{2}}$.

Per $y \geq 2$, $F_Y(y) = 1$.

Y és una variable mixta amb salts en $y = 0$ ($P(Y = 0) = e^{-2}$) i en $y = 2$ ($P(Y = 2) = 1 - e^{-1}$).

(d) Pel teorema de l'esperança:

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx = \int_0^{50} 2\frac{1}{50}e^{-\frac{x}{50}}dx + \int_{50}^{100} (4 - \frac{x}{25})\frac{1}{50}e^{-\frac{x}{50}}dx$$

Amb el canvi $x = 50t$:

$$E[Y] = \int_0^1 2e^{-t}dx + \int_1^2 (4 - 2x)e^{-t}dx = 2(1 - e^{-1} + e^{-2}) = 1.5349.$$