

1. Les portes d'un edifici s'obren amb uns dispositius que, normalment, tenen una probabilitat de fallar igual a 0,2 (és a dir, la probabilitat que al pulsar-lo no s'obri la porta). A més, per un defecte en el control de qualitat, un 25% dels dispositius estan desajustats, de manera que tenen una probabilitat de fallar igual a 0,4.
  - (a) Apliquem el següent test: polsem  $n$  vegades el dispositiu i si la porta s'obre les  $n$  vegades decidim que el dispositiu és correcte (si no, no prenem cap decisió). Quant ha de valer  $n$  per tal que la probabilitat d'encertar valgui almenys 0,98?
  - (b) A l'edifici hi ha 100 portes, cadascuna amb el seu dispositiu independent. Si polsem una vegada tots els dispositius, quantes portes s'obriran en promig?
  - (c) Una porta té un dispositiu avariats pel qual la probabilitat de fallar val 0,7. Sigui  $N$  el nombre de vegades que l'hem de pulsar per a que s'obri la porta. Quin tipus de variable aleatòria és  $N$ ? Què val la seva esperança,  $m$ ? Quina és la probabilitat que  $N$  sigui major que  $m$ ?
  - (d) Una porta té connectats, de manera paral·lela i independent, tres dispositius desajustats. Si els polsem els tres alhora, quina és la probabilitat que s'obri la porta?

**Resolució:**

(a) Indiquem  $C$  dispositiu correcte i  $D$  dispositiu desajustat. Llavors,  $P(C) = \frac{3}{4}$  i  $P(D) = \frac{1}{4}$ . A més,  $P(\text{obrir}|C) = 0,8$  i  $P(\text{obrir}|D) = 0,6$ . Així, si  $O_n$  és l'esdeveniment "la porta s'obre les  $n$  vegades", per Bayes tenim:

$$P(C|O_n) = \frac{P(O_n|C)P(C)}{P(O_n|C)P(C) + P(O_n|D)P(D)} = \frac{0,8^n \frac{3}{4}}{0,8^n \frac{3}{4} + 0,6^n \frac{1}{4}} = \frac{3}{3 + (\frac{3}{4})^n}.$$

Volem  $P(C|O_n) \geq 0,98$ , és a dir  $0,75^n \leq 0,06122$ , d'on  $n \geq \frac{\ln 0,06122}{\ln 0,75} = 9,7$ . Per tant, ha de ser  $n \geq 10$ .

(b) Per una porta,  $P(\text{obrir-se}) = P(\text{obrir-se}|C)P(C) + P(\text{obrir-se}|D)P(D) = 0,8 \cdot 0,75 + 0,6 \cdot 0,25 = 0,75$ . De 100 portes se n'obren, en promig,  $100 \cdot 0,75 = 75$ .

(c)  $N$  és una variable geomètrica amb  $p = 0,3$ . La seva esperança és  $m = \frac{1}{p} = 3,33$ .  $P(N > m) = P(N \geq 4) = 1 - P(N \leq 3) = q^3 = 0,7^3 = 0,343$ .

(d)  $P(\text{s'obri}) = P(\text{algun dispositiu funciona}) = 1 - P(\text{els tres fallen}) = 1 - 0,4^3 = 0,936$ .

2. La demanda mensual d'un producte és una variable aleatòria  $X$  que pren valors a  $[0, \infty)$  i té funció de densitat  $f_X(x) = xe^{-x}$  per  $x \geq 0$ .

- (a) Calculeu l'esperança  $m$  i la desviació  $\sigma$  de  $X$ .
- (b) Calculeu la funció de distribució de  $X$ ,  $F_X(x)$ , i la probabilitat que  $X > m$ .
- (c) Quants mesos a l'any podem esperar que la demanda sigui inferior a 1?
- (d) El benefici brut  $Y$  que obtenim en funció de la demanda  $X$  és  $Y = g(X)$  on:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calculeu la funció de distribució i el valor mitjà de la variable aleatòria  $Y$ .

**Resolució:**

(a)  $m = \int_0^{\infty} x \cdot xe^{-x} dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 2$ .

$E[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 \cdot xe^{-x} dx = \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx = 6$ .  $V[X] = E[X^2] - m^2 = 2$ , d'on  $\sigma = \sqrt{2}$ .

(b) Per  $x < 0$ ,  $F_X(x) = 0$ . Per  $x > 0$ ,

$$F_X(x) = \int_0^x te^{-t} dt = -(t+1)e^{-t} \Big|_0^x = 1 - (x+1)e^{-x}.$$

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F_X(2) = 3e^{-2} = 0,406$ .

(c)  $P(X < 1) = F_X(1) = 1 - 2e^{-1} = 0,264$ . Com  $12 \cdot P(X < 1) = 3,17$ , podem esperar que passi uns tres mesos.

(d)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - (y+1)e^{-y} & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

És una variable mixta, ja que tenim una discontinuïtat en  $y = 1$ .

Pel teorema de l'esperança:

$$E[Y] = \int_0^{\infty} g(x) \cdot xe^{-x} dx = \int_0^1 x \cdot xe^{-x} dx + \int_1^{\infty} 1 \cdot xe^{-x} dx \\ -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} \Big|_0^1 - (x+1)e^{-x} \Big|_1^{\infty} = 2 - 3e^{-1} = 0,89.$$