

1. Cada roda d'un cotxe té una probabilitat igual a 0,21 de punxar durant una carrera. Un cotxe acaba la carrera si com a molt punxa una roda.
- 15 cotxes participen a la carrera. Quants l'acaben en mitjana?
  - Quina és la probabilitat que dels cotxes anteriors almenys dos no acabin la carrera?
  - Si un cotxe acaba la carrera, quina és la probabilitat que hagi punxat alguna roda?
  - Quan un cotxe acaba una carrera, queda qualificat per correr a la següent carrera. Sigui  $N$  el nombre de carreres que arriba a correr fins que queda desqualificat. Doneu la funció de probabilitat de  $N$ , la seva esperança i la probabilitat que  $N \geq 3$ .

**Solució:**

(a) El nombre de rodes que punxen és  $R$ , binomial amb  $n = 4$  i  $p = 0,21$ . L'esdeveniment  $C =$  "acabar la carrera" equival a  $R = 0$  o  $R = 1$ . Així,  $P(C) = (1 - p)^4 + 4p(1 - p)^3 = 0,8036$ .

El nombre de cotxes que acaben la carrera és una variable binomial amb  $n = 15$  i  $p = 0,8036$ . La seva esperança val  $np = 12,0548$ . En mitjana acaben la carrera 12 cotxes.

(b)  $P(\text{almenys 2 no acaben}) = 1 - P(\text{màxim de 1 no acaba}) = 1 - P(\text{acaben tots}) - P(\text{acaben 14}) = 1 - P(C)^{15} - 15P(C)^{14}(1 - P(C)) = 0,8242$ .

(c)  $P(R \geq 1|C) = \frac{P((R \geq 1) \cap C)}{P(C)} = \frac{P(R = 1)}{P(C)} = \frac{4 \cdot 0,21(1 - 0,21)^3}{0,8036} = 0,5153$ .

(d)  $N$  és una variable geomètrica amb  $p = 1 - P(C) = 0,1963$ .  $P(N = n) = P(C)^{n-1}(1 - P(C)) = 0,1963 \cdot 0,8036^{n-1}$ , per  $n \geq 1$ . La seva esperança val  $\frac{1}{p} = 5,0930$ , en mitjana corre 5 carreres.  $P(N \geq 3) = 1 - F_N(2) = P(C)^2 = 0,6458$ .

2. Un electró es troba en una cavitat prima de longitud  $L$ , de manera que la seva posició  $X$  és una variable aleatòria amb densitat:  $f_X(x) = Kx^2(L - x)$  per  $0 < x < L$ .

- (a) Calculeu la constant  $K$  i la funció de distribució de  $X$ .
- (b) Siguin  $M_1 = [0, \frac{L}{2}]$  i  $M_2 = [\frac{L}{2}, L]$ . A la regió  $M_2$  hi ha un detector que, en cas que l'electró es trobi a  $M_2$ , té probabilitat d'absorbir-lo igual a 0,9 (el detector no afecta l'electró si aquest es troba a  $M_1$ ). Si l'electró no ha estat absorbit pel detector, quina és la probabilitat que es trobi a  $M_2$ ?
- (c) En un extrem de la cavitat hi ha una càrrega elèctrica de manera que l'energia de l'electró val  $U = \frac{\alpha}{X}$  per certa constant  $\alpha$ . Calculeu la variància de  $U$ .
- (d) Calculeu la funció de densitat i l'esperança de la variable  $Z = \frac{X^3}{L^3}$ .

**Solució:**

(a)  $1 = \int_0^L Kx^2(L - x)dx = K \int_0^L (Lx^2 - x^3)dx = K \frac{L^4}{12}$ , d'on  $K = \frac{12}{L^4}$ .

$F_X(x) = \int_0^x f_X(t)dt = \frac{12}{L^4} \int_0^x (Lt^2 - t^3)dt = 4\frac{x^3}{L^3} - 3\frac{x^4}{L^4}$ , per  $0 < x < L$  (per  $x < 0$  val 0 i per  $x > L$  val 1).

(b) Indiquem per  $A$  l'esdeveniment "ser absorbit l'electró". Notem que  $P(A|M_1) = 0$  i  $P(A|M_2) = 0,9$ , d'on  $P(\bar{A}|M_1) = 1$  i  $P(\bar{A}|M_2) = 0,1$ . A més,  $P(M_1) = F_X(\frac{L}{2}) = \frac{5}{16}$  i  $P(M_2) = 1 - P(M_1) = \frac{11}{16}$ .

Ara, per Bayes:

$$P(M_2|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}|M_2)P(M_2)}{P(\bar{A}|M_1)P(M_1) + P(\bar{A}|M_2)P(M_2)} = \frac{0,1 \cdot \frac{11}{16}}{1 \cdot \frac{5}{16} + 0,1 \cdot \frac{11}{16}} = 0,1803.$$

(c) Apliquem el teorema de l'esperança:

$$E[U] = \frac{12}{L^4} \int_0^L \frac{\alpha}{x}(Lx^2 - x^3)dx = \frac{2\alpha}{L}. \quad E[U^2] = \frac{12}{L^4} \int_0^L \frac{\alpha^2}{x^2}(Lx^2 - x^3)dx = \frac{6\alpha^2}{L^2}.$$

$$V[U] = E[U^2] - E[U]^2 = \frac{2\alpha^2}{L^2}.$$

(d) La transformació és bijectiva amb  $\Omega_Z = [0, 1]$ .

$$f_Z(z) = f_X(x) \frac{1}{|\frac{dz}{dx}|} = \frac{12}{L^4} x^2(L - x) \frac{1}{\frac{3x^2}{L^3}} = 4(1 - \frac{x}{L}) = 4(1 - \sqrt[3]{z}).$$