

1. Un mòdul de computació consta de 20 processadors paral·lels,  $K_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 20$ . Quan un usuari hi accedeix, se li assignen 3 processadors diferents triats a l'atzar entre els 20. L'assignació es fa de manera independent per a cada usuari.
  - (a) Calculeu la probabilitat que dos usuaris donats comparteixin algun processador.
  - (b) El processador  $K_1$  és més ràpid que els altres. Sigui  $M$  el nombre de vegades que accediu al mòdul fins que  $K_1$  es troba entre els vostres processadors assignats. Doneu la funció de probabilitat i el valor mitjà de  $M$ .
  - (c) La probabilitat de finalitzar cert càlcul quan es disposa de  $K_1$  és el doble que quan no se'n disposa. Quina és la probabilitat que un usuari disposés de  $K_1$  sabent que ha finalitzat aquest càlcul?
  - (d) Habent accedit 10 usuaris, sigui  $N$  el nombre d'ells que tenen els tres processadors dins del conjunt  $\mathcal{A} = \{K_i | 1 \leq i \leq 10\}$ . Calculeu el valor mitjà de  $N$  i la probabilitat que  $N \leq 2$ .

**Solució:**

(a)  $P(\text{"algun processador comú"}) = 1 - P(\text{"3 processadors diferents"})$ . Ara només hem d'imposar que el segon usuari tingui els processadors diferents del primer. Els pot triar de  $\binom{20}{3}$  maneres possibles. Per a que siguin diferents dels tres del primer usuari tenim  $\binom{17}{3}$  maneres. Així;

$$P(\text{"algun processador comú"}) = 1 - \frac{\binom{17}{3}}{\binom{20}{3}} = 1 - \frac{17 \cdot 16 \cdot 15}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{23}{57} = 0,4035.$$

(b) La probabilitat de tenir assignat  $K_1$  val  $p = \frac{\binom{19}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{3}{20} = 0,15$ . La variable  $M$  és geomètrica de paràmetre  $p$ . Llavors,  $E[M] = \frac{1}{p} = 6,7$  i  $P_M(k) = \left(\frac{17}{20}\right)^{k-1} \frac{3}{20}$  per  $k \geq 1$ .

(c) Sigui  $C$  l'esdeveniment "finalitzar el càlcul". Per Bayes:

$$\begin{aligned} P(K_1|C) &= \frac{P(C|K_1)P(K_1)}{P(C|K_1)P(K_1) + P(C|\overline{K_1})P(\overline{K_1})} = \frac{2P(C|\overline{K_1})\frac{3}{20}}{2P(C|\overline{K_1})\frac{3}{20} + P(C|\overline{K_1})\frac{17}{20}} \\ &= \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 3 + 17} = \frac{6}{23} = 0,2608. \end{aligned}$$

(d) La probabilitat de tenir els tres processadors dins el conjunt  $\mathcal{A}$  val  $\frac{\binom{10}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{2}{19}$ .  $N$  és una variable binomial amb  $n = 10$  i  $p = \frac{2}{19}$ . El seu valor mitjà és  $np = \frac{20}{19} = 1,05$ .

$$P(N \leq 2) = P(N=0) + P(N=1) + P(N=2) = q^{10} + 10q^9p + 45q^8p^2 = 0,92.$$

2. Un canal de comunicació transmet símbols donats per nombres enters representats com la intensitat d'un senyal elèctric. El soroll introduït pel canal fa que, si s'envia el símbol  $n \in \mathbb{Z}$ , es rebí un valor  $X$  corresponent a una variable aleatòria gaussiana amb  $m = n$  i  $\sigma = \frac{1}{4}$ . El receptor tria el nombre enter més proper al valor rebut.

- (a) Calculeu la probabilitat que a l'enviar un símbol aquest es rebí incorrectament.
- (b) Pel cas  $n = 0$ , trobeu la densitat de la variable  $Y = e^{-8X^2}$ .
- (c) Calculeu el moment  $n$ -èsim de l'anterior variable  $Y$  (indicació: utilitzeu el teorema de l'esperança i  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ .)
- (d) Què valen l'esperança i la desviació estàndard de  $Y$ ?

**Solució:**

$X$  té funció de distribució  $F_X(x) = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{4}{\sqrt{2}}(x - n) \right) \right)$  i funció de densitat  $f_X(x) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} e^{-8(x-n)^2}$ .

(a)

$$\begin{aligned} P(\text{error}) &= 1 - P \left( n - \frac{1}{2} < X < n + \frac{1}{2} \right) = 1 - \left( F_X \left( n + \frac{1}{2} \right) - F_X \left( n - \frac{1}{2} \right) \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{2}{\sqrt{2}} \right) \right) + \frac{1}{2} \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{2}{\sqrt{2}} \right) \right) = 1 - \operatorname{erf}(\sqrt{2}) = 0,0455. \end{aligned}$$

(b) Notem que  $\Omega_Y = (0, 1)$ . Si  $g(x) = e^{-8x^2}$  per a cada  $y \in (0, 1)$  l'equació  $y = g(x)$  té dues solucions  $x_1 = -\sqrt{-\frac{\ln y}{8}}$  i  $x_2 = \sqrt{-\frac{\ln y}{8}}$ .

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|} = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} e^{-8x_1^2} \frac{1}{|-16x_1 e^{-8x_1^2}|} + \frac{4}{\sqrt{2\pi}} e^{-8x_2^2} \frac{1}{|-16x_2 e^{-8x_2^2}|} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{-\frac{\ln y}{8}}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{-\pi \ln y}}, \quad 0 < y < 1. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} E[Y^n] &= E[e^{-8nX^2}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-8nx^2} \frac{4e^{-8x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-8(n+1)x^2} dx = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{8(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

(d) Amb l'anterior fórmula dels moments veiem que  $E[Y] = \frac{1}{\sqrt{2}}$  i  $E[Y^2] = \frac{1}{\sqrt{3}}$  d'on  $V[Y] = \frac{1}{\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ . Així,  $Y$  té esperança igual a  $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$  i desviació igual a  $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}} = 0,278$ .