

## Examen Parcial

21 d'abril de 2010

1. Es transmet una seqüència binària de símbols independents on la probabilitat d'aparició del 1 val  $\frac{1}{3}$ . Utilitzem dos canals paral·lels independents. En cada canal, la probabilitat que un símbol donat arribi canviat val  $\epsilon$ , tant si entra un 1 com un 0. A la sortida triem el símbol comú als dos canals, o 0 si les sortides difereixen.
  - (a) Calculeu la probabilitat d'error per símbol enviat. És a dir,  $P(S \neq E)$  on  $E$  és el símbol entrant i  $S$  és el símbol sortint. Demostreu (gràficament, per exemple) que aquesta probabilitat és inferior a la probabilitat d'error en un sol canal per a tot  $\epsilon \in (0, 1)$
  - (b) Considereu  $\epsilon = 0,1$ . S'envien 10 símbols. Calculeu les probabilitats que no hi hagi cap error, que hi hagi un sol error i que hi hagi exactament dos errors. A partir de la suma d'aquestes tres probabilitats: què podem dir de les probabilitats de tenir més de dos errors?
  - (c) En funció de  $\epsilon$ , que valen en mitjana els percentatges de uns en l'entrada i en la sortida, respectivament? Quin és el mínim valor que pot tenir el percentatge mitjà de uns en la sortida?
  - (d) Quina és la probabilitat que un 1 detectat a la sortida correspongui a un 0 en l'entrada. Comparar amb un sol canal.
  - (e) En mitjana cal enviar 70 símbols fins que la sortida dels dos canals mostra valors diferents. Trobeu el valor de  $\epsilon$ . Quina desviació podem esperar d'aquest nombre de transmissions al voltant de 70?

2. La posició d'un electró en un fil conductor semiindefinit és una variable aleatòria  $X$  de densitat:

$$f_n(x) = K_n x^n e^{-x}, \quad x > 0,$$

on  $K_n$  és una constant i  $n = 0, 1, 2, \dots$  correspon als diferents estats en que pot trobar-se l'electró.

- (a) Calculeu el valor de  $K_n$ , així com l'esperança i la variància de la posició de l'electró en l'estat  $n$ .
- (b) Es prepara un electró de manera que pot trobar-se en els estats  $n = 0$  o  $n = 1$  amb probabilitat  $\frac{1}{2}$  cadascun. Si observem que no es troba entre  $x = 0$  i  $x = 1$ , quina és la probabilitat de trobar-se en cada estat?
- (c) Tenim dos electrons independents en l'estat  $n = 0$ . Distingim dues regions del fil:  $F_1 = \{0 < x < 1\}$  i  $F_2 = \{1 < x < \infty\}$ . Quina és la probabilitat que els dos electrons es trobin a la mateixa regió?
- (d) La presència d'un camp elèctric fa que l'energia de l'electró valgui  $U = e^{-X}$ . Trobeu la funció de densitat de la variable  $U$  així com els seus moments ( $m_k = E[U^k]$ ). Quina és l'energia mitjana en l'estat  $n$ ?

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES!!