

Examen Parcial

21 d'abril de 2010

1. Es transmet una seqüència binària de símbols independents on la probabilitat d'aparició del 1 val $\frac{1}{3}$. Utilitzem dos canals paral·lels independents. En cada canal, la probabilitat que un símbol donat arribi canviat val ϵ , tant si entra un 1 com un 0. A la sortida triem el símbol comú als dos canals, o 0 si les sortides difereixen.
 - (a) Calculeu la probabilitat d'error per símbol enviat. És a dir, $P(S \neq E)$ on E és el símbol entrant i S és el símbol sortint. Demostreu (gràficament, per exemple) que aquesta probabilitat és inferior a la probabilitat d'error en un sol canal per a tot $\epsilon \in (0, 1)$
 - (b) Considereu $\epsilon = 0,1$. S'envien 10 símbols. Calculeu les probabilitats que no hi hagi cap error, que hi hagi un sol error i que hi hagi exactament dos errors. A partir de la suma d'aquestes tres probabilitats: què podem dir de les probabilitats de tenir més de dos errors?
 - (c) En funció de ϵ , que valen en mitjana els percentatges de uns en l'entrada i en la sortida, respectivament? Quin és el mínim valor que pot tenir el percentatge mitjà de uns en la sortida?
 - (d) Quina és la probabilitat que un 1 detectat a la sortida correspongui a un 0 en l'entrada. Comparar amb un sol canal.
 - (e) En mitjana cal enviar 70 símbols fins que la sortida dels dos canals mostra valors diferents. Trobeu el valor de ϵ . Quina desviació podem esperar d'aquest nombre de transmissions al voltant de 70?

Solució:

(a) Indiquem per E el bit d'entrada i S el bit de sortida (decidit a partir del que surt als dos canals).

Tenim: $P(E=0) = \frac{2}{3}$, $P(E=1) = \frac{1}{3}$, $P(S=1|E=0) = \epsilon^2$, $P(S=0|E=0) = 1 - \epsilon^2$, $P(S=1|E=1) = (1 - \epsilon)^2$, $P(S=0|E=1) = \epsilon^2 + 2\epsilon(1 - \epsilon) = 2\epsilon - \epsilon^2$.

Llavors:

$$P(S \neq E) = P(S=1|E=0)P(E=0) + P(S=0|E=1)P(E=1) =$$

$$\frac{2}{3}\epsilon^2 + \frac{1}{3}(2\epsilon - \epsilon^2) = \frac{1}{3}(2\epsilon + \epsilon^2).$$

Amb un sol canal, la probabilitat d'error val ϵ . $\epsilon > \frac{1}{3}(2\epsilon + \epsilon^2)$ equival a $\epsilon > \epsilon^2$, que es verifica per a tot $0 < \epsilon < 1$.

(b) El nombre d'errors N és binomial amb $n = 10$ i $p = \frac{1}{3}(2 \cdot 0,1 + 0,1^2) = 0,07$.

$P(N=0) = (1 - 0,07)^{10} = 0,4839$, $P(N=1) = 10 \cdot 0,07(1 - 0,07)^9 = 0,43642$, $P(N=2) = \binom{10}{2} \cdot 0,07^2(1 - 0,07)^8 = 0,1233$.

Les tres probabilitats sumen 0,971 de manera que la probabilitat de tenir més de dos errors ja és bastant més petita.

(c) La proporció de uns a l'entrada és $\frac{1}{3}$ (33,3%). La proporció de uns a la sortida és:

$$P(S=1) = P(S=1|E=0)P(E=0) + P(S=1|E=1)P(E=1) =$$

$$\frac{2}{3}\epsilon^2 + \frac{1}{3}(1 - \epsilon)^2 = \frac{1}{3}(3\epsilon^2 - 2\epsilon + 1).$$

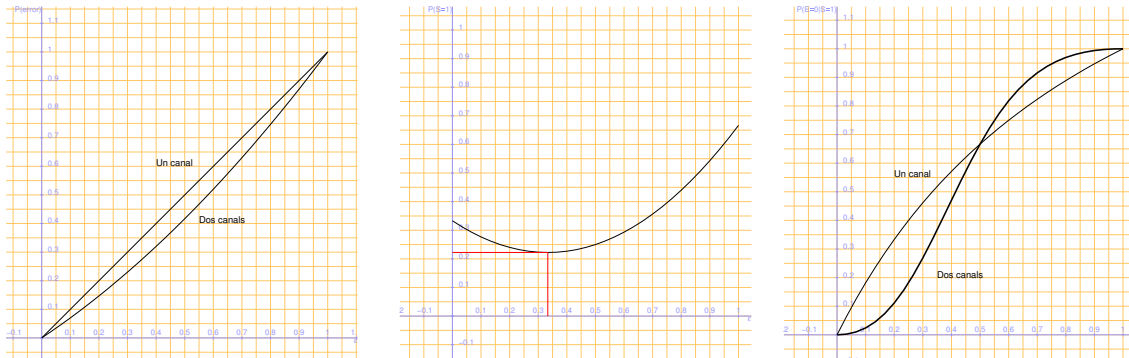


Figura 1: Probabilitat d'error amb un i dos canals (esquerra). Probabilitat de $S = 1$ (centre). Probabilitat de $E = 0$, si $S = 1$ (dreta).

Aquesta probabilitat val $\frac{1}{3}$ per $\epsilon = 0$ i $\frac{2}{3}$ per $\epsilon = 1$. Derivant i igualant a zero trobem un mínim en $\epsilon = \frac{1}{3}$ on $P(S = 1) = \frac{2}{9}$. Així, la mínima proporció és del 22,2%.

(d) Per Bayes:

$$\begin{aligned}
 P(E=0|S=1) &= \frac{P(S=1|E=0)P(E=0)}{P(S=1)} = \frac{\frac{2}{3}\epsilon^2}{\frac{1}{3}(2\epsilon^2 - 2\epsilon + 1)} \\
 &= \frac{2\epsilon^2}{3\epsilon^2 - 2\epsilon + 1}.
 \end{aligned}$$

Amb un sol canal:

$$\begin{aligned}
 P(E=0|S=1) &= \frac{P(S=1|E=0)P(E=0)}{P(S=1|E=0)P(E=0) + P(S=1|E=1)P(E=1)} = \frac{\frac{2}{3}\epsilon}{\frac{2}{3}\epsilon + \frac{1}{3}(1 - \epsilon)} \\
 &= \frac{2\epsilon}{1 + \epsilon}.
 \end{aligned}$$

(e) $P(\text{canals diferents}) = 2\epsilon(1 - \epsilon)$. El nombre de símbols fins que això passa és una variable geomètrica M de paràmetre $p = \frac{1}{70}$. L'equació $2\epsilon(1 - \epsilon) = \frac{1}{70}$ té dues solucions: 0,00719 i 0,9928. La raonable és la petita. La desviació de M val $\frac{\sqrt{q}}{p} = 69,4$. Per tant, el valor obtingut de ϵ és poc fiable.

2. La posició d'un electró en un fil conductor semiindefinit és una variable aleatòria X de densitat:

$$f_n(x) = K_n x^n e^{-x}, \quad x > 0,$$

on K_n és una constant i $n = 0, 1, 2 \dots$ correspon als diferents estats en que pot trobar-se l'electró.

- (a) Calculeu el valor de K_n , així com l'esperança i la variància de la posició de l'electró en l'estat n .
- (b) Es prepara un electró de manera que pot trobar-se en els estats $n = 0$ o $n = 1$ amb probabilitat $\frac{1}{2}$ cadascun. Si observem que no es troba entre $x = 0$ i $x = 1$, quina és la probabilitat de trobar-se en cada estat?
- (c) Tenim dos electrons independents en l'estat $n = 0$. Distingim dues regions del fil: $F_1 = \{0 < x < 1\}$ i $F_2 = \{1 < x < \infty\}$. Quina és la probabilitat que els dos electrons es trobin a la mateixa regió?
- (d) La presència d'un camp elèctric fa que l'energia de l'electró valgui $U = e^{-X}$. Trobeu la funció de densitat de la variable U així com els seus moments ($m_k = E[U^k]$). Quina és l'energia mitjana en l'estat n ?

Solució:

$$(a) 1 = \int_0^{\infty} K_n x^n e^{-x} dx = K_n n!, \text{ d'on } K_n = \frac{1}{n!}.$$

$$E[X] = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x \cdot x^n e^{-x} dx = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1.$$

$$E[X^2] = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^2 \cdot x^n e^{-x} dx = \frac{(n+2)!}{n!} = (n+2)(n+1).$$

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = (n+2)(n+1) - (n+1)^2 = n+1.$$

(b) $P(X > 1|n = 0) = \int_1^{\infty} e^{-x} dx = e^{-1}$. $P(X > 1|n = 1) = \int_1^{\infty} x e^{-x} dx = -(x+1)e^{-x}|_1^{\infty} = 2e^{-1}$. Per bayes

$$P(n = 0|X > 1) = \frac{P(X > 1|n = 0)P(n = 0)}{P(X > 1|n = 0)P(n = 0) + P(X > 1|n = 1)P(n = 1)}$$

$$\frac{e^{-1} \frac{1}{2}}{e^{-1} \frac{1}{2} + 2e^{-1} \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

$$P(n = 1|X > 1) = 1 - P(n = 0|X > 1) = \frac{2}{3}.$$

(c) $n = 0$ correspon a una variable exponencial de paràmetre 1. Per aquesta variable $P(F_1) = 1 - e^{-1}$, $P(F_2) = e^{-1}$.

$P(\text{els dos a la mateixa regió}) = P(\text{els dos a } F_1) + P(\text{els dos a } F_2) = P(F_1)^2 + P(F_2)^2 = (1 - e^{-1})^2 + e^{-2} = 1 - 2e^{-1} + 2e^{-2} = 0,5349$.

(d) Com X varia entre 0 i ∞ , $\Omega_U = (0, 1)$. A cada valor $u \in (0, 1)$ correspon una $x = -\ln u$.

$$f_U(u) = f_X(x) \frac{1}{|du/dx|} = \frac{x^n}{n!} e^{-x} \frac{1}{|-e^{-x}|} = \frac{(-\ln u)^n}{n!}.$$

$$m_k = E[U^k] = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} e^{-kx} \cdot x^n e^{-x} dx = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^n e^{-(k+1)x} dx = \frac{1}{(k+1)^{n+1} n!} \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = \frac{1}{(k+1)^{n+1}}.$$

L'energia mitjana en l'estat n és $m_1 = \frac{1}{2^{n+1}}$.