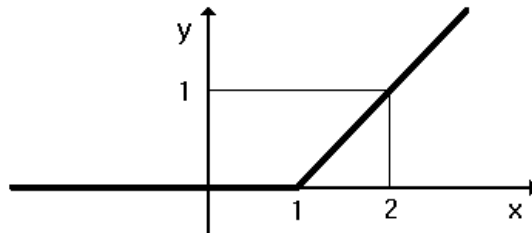


PROBABILITAT I PROCESSOS ESTOCÀSTICS

3 de novembre de 1997

- Un experiment \mathcal{E} genera nombres aleatoris X que poden prendre valors $0, 1, 2, \dots$ amb probabilitats $P_X(k) = Ae^{-k}$.
 - Determineu la constant A i l'esperança de X .
 - En dues repeticions de \mathcal{E} quines són les probabilitats que el segon sigui menor, igual o major que el primer?
- Tirem un dau (cares numerades de 1 a 6) i el resultat és N . Després generem una variable X , exponencial de paràmetre $\lambda = \frac{1}{N}$.
 - Si $X > 3$ calculeu la probabilitat que el dau hagués tret un 6.
 - Considereu la variable X que resulta quan $N = 2$. Donada $Y = g(X)$ amb g la funció del dibuix, calculeu i dibuixeu la funció de distribució de Y i calculeu $E[Y]$.
 - Que valen $P(Y = 0)$ i $P(Y=1)$?



Solució:

1. (a)

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} Ae^{-k} = A \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-1})^k = \frac{A}{1 - e^{-1}} \Rightarrow A = 1 - e^{-1}.$$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} kAe^{-k} = A \sum_{k=0}^{\infty} k(e^{-1})^k = (1 - e^{-1}) \frac{e^{-1}}{(1 - e^{-1})^2} = \frac{1}{e - 1}.$$

(Fent servir

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{-k} = \frac{1}{1 - x}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} kx^{-k} = x \frac{d}{dx} S(x) = \frac{x}{(1 - x)^2}.)$$

(b) Amb la fórmula de la probabilitat total:

$$P(X_2 = X_1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_2 = X_1 | X_1 = k) P(X_1 = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_2 = k) P(X_1 = k) = \sum_{k=0}^{\infty} (Ae^{-k})^2 = A^2 \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-2})^k = \frac{(1 - e^{-1})^2}{1 - e^{-2}} = \frac{e - 1}{e + 1}.$$

Per simetria $P(X_2 > X_1) = P(X_2 < X_1)$ i també $P(X_2 = X_1) + P(X_2 > X_1) + P(X_2 < X_1) = 1$. Llavors

$$P(X_2 > X_1) = P(X_2 < X_1) = \frac{1}{2}(1 - P(X_2 = X_1)) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{e - 1}{e + 1}\right) = \frac{1}{e + 1}.$$

2. (a) Apliquem Bayes

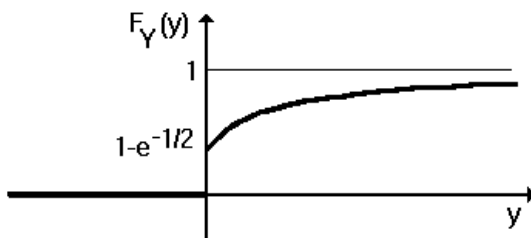
$$P(N = 6 | X > 3) = \frac{P(X > 3 | N = 6) P(N = 6)}{\sum_{n=0}^6 P(X > 3 | N = n) P(N = n)}.$$

$$P(N = n) = \frac{1}{6}, \quad P(X > 3 | N = n) = \int_3^{\infty} \frac{1}{n} e^{-x/n} dx = e^{-3/n}.$$

$$P(N = 6 | X > 3) = \frac{e^{-3/6} \frac{1}{6}}{\sum_{n=0}^6 e^{-3/n} \frac{1}{6}} = \frac{e^{-1/2}}{e^{-3} + e^{-3/2} + e^{-1} + e^{-3/4} + e^{-3/5} + e^{-1/2}} = 0.267$$

(b) X es exponencial de paràmetre $\lambda = 1/2$. Llavors, per $x > 0$, $F_X(x) = 1 - e^{-x/2}$ i $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2}$. $Y = X - 1$ si $X > 1$ i 0 altrament. Per tant, si $y > 0$, $Y \leq y$ equival a $X \leq Y + 1$.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ P(X \leq 1) = 1 - e^{-1/2} & y = 0 \\ F_X(y + 1) = 1 - e^{-(y+1)/2} & y > 0 \end{cases}$$



$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx = \int_1^{\infty} (x-1)\frac{1}{2}e^{-x/2}dx = 2e^{-1/2}$$

(c)

$$P(Y = 0) = P(X \leq 1) = F_X(1) = 1 - e^{-1/2},$$

$$P(Y = 1) = P(X = 0) = 0.$$

($P(X = 0) = 0$ per ser X contínua.)