PROBABILITAT I PROCESSOS ESTOCÀSTICS

18 de desembre de 1997

1. Una variable aleatòria bidimensional (X, Y) té densitat

$$f(x,y) = \begin{cases} A(x+y) & \text{si} \quad 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

   (a) Determineu la constant A i els moments conjunts $m_{r,s}$.

   (b) Utilitzant el resultat anterior calculeu el coeficient de correlació entre X i Y.

   (c) Quina funció $c(X)$ dona la millor estimació en mitjana quadràtica de Y.

2. Les variables aleatòries independents X_i $(i = 1, 2, \ldots)$ són totes gaussianes amb esperança 1 i variança 2. Calculeu $P(X_{n+1} > X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$.

3. Donades dues variables contínues independents X i Y

   (a) Demostreu que
$$P(Y > X) = 1 - E[F_Y(X)].$$

   (b) Definim la variable $Z = F_Y(X) + F_X(Y)$. Què val $E[Z]$?

   (c) Trobeu un anàleg del teorema de convolució per la variable $Z = X - Y$. Calculeu la densitat de Z si X i Y són exponencials de paràmetre λ.