PROBABILITAT I PROCESSOS ESTOCÀSTICS

15 de novembre de 1999

1. Tenim una bossa amb $2n$ monedes de les quals una té dues cares. En triem a l'atzar n. Calculeu la probabilitat d'haver triat la moneda de dues cares si al tirar-les

   (a) totes treuen cara.

   (b) alguna treu cara.

   Resolució:

   Denotem els esdeveniments D =”triar la moneda de dues cares”, T =”totes treuen cara” i A =”alguna treu cara”. Per Bayes

   $$P(D|T) = \frac{P(T|D)P(D)}{P(T|D)P(D) + P(T|\bar{D})P(\bar{D})}.$$

   Triant n monedes de les $2n$ la de dues cares te la mateixa probabilitat de estar en les n que triem que en les n que no triem. Llavors $P(D) = P(\bar{D}) = 1/2$. Per una altra banda $P(T|D) = (1/2)^{n-1}$ i $P(T|\bar{D}) = (1/2)^n$. Llavors

   $$P(D|T) = \frac{(1/2)^{n-1}}{(1/2)^{n-1} + (1/2)^n} = \frac{2}{3}.$$

   De la mateixa manera

   $$P(D|A) = \frac{P(A|D)P(D)}{P(A|D)P(D) + P(A|\bar{D})P(\bar{D})}$$

   on $P(A|D) = 1$ i $P(A|\bar{D}) = 1 - (1/2)^n$. Llavors

   $$P(A|T) = \frac{1}{1 + (1 - (1/2)^n)} = \frac{2^n}{2^{n+1} - 1}.$$

2. Les gotes d'aigua que formen la pluja són perfectament esfèriques i el seu radi és una variable aleatòria exponencial. A través de mesures es determina que el volum promig d'aquestes gotes val 2 mm^3.

   (a) Quin és el promig de la superfície d'aquestes gotes?

   (b) Quantes gotes hem de considerar per tal que la probabilitat que alguna tingui un volum superior a 4 mm^3 sigui superior a 0.5?

   Resolució:

(a) Sigui R la variable aleatòria que dóna el radi d'una gota triada a l'atzar. La seva funció de densitat té la forma $f_R(r) = \lambda e^{-\lambda r}$ per $r > 0$. El volum i la superfície de la gota són variables aleatòries $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ i $S = 4\pi R^2$, respectivament. Les seves esperances valen

$$E[V] = \int_0^\infty \frac{4}{3}\pi r^3 \lambda e^{-\lambda r} dr = \frac{4}{3}\pi\frac{1}{\lambda^3}\int_0^\infty t^3 e^{-t} dt = \frac{8\pi}{\lambda^3}$$

$$E[S] = \int_0^\infty 4\pi r^2 \lambda e^{-\lambda r} dr = 4\pi\frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty t^2 e^{-t} dt = \frac{8\pi}{\lambda^2}$$

De la primera relació deduim que $\lambda = \sqrt[3]{8\pi} = 2.9292mm^{-1}$. Per tant $E[S] = 4.6499mm^2$.

(b) Per una gota $V > 4$ equival a $R > \sqrt[3]{3/\pi}$. Llavors $P(V > 4) = \exp(-\lambda\sqrt[3]{3/\pi}) = \exp(-2\sqrt[3]{3}) = 0.0559$. En una mostra de n gotes la probabilitat que n'hi hagi alguna amb $V > 4$ val

$$1 - P(\text{totes amb } V < 4) = 1 - (1 - P(V > 4))^n = 1 - (1 - e^{-2\sqrt[3]{3}})^n$$

Igualant a 0.5 aquesta probabilitat obtenim $n = 12.05$. Així hem de considerar $n \geq 13$.

3. X és una v.a. amb $\Omega_X = [0, a]$ i funció de densitat $f_X(x) = Ax^2(a - x)$ en aquest conjunt.

(a) Calcular la constant A.

(b) Definim una nova variable $Y = g(X)$ on

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{a}{2} \\ x - \frac{a}{2} & \text{si } x > \frac{a}{2} \end{cases}$$

Calcular la funció de distribució de Y.

(c) Que valen $P(Y = 0)$ i $P(Y = a/2)$?

Resolució:

(a) $A = 12/a^4$ ja que

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = A\int_0^a x^2(a - x)dx = A\left[a\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^a = A\frac{a^4}{12}.$$

(b) Es veu fàcilment que $\Omega_Y = [0, a/2]$. Llavors $F_Y(y) = 0$ per $y < 0$. En $y = 0$ saltem la quantitat

$$P(0 < X < \frac{a}{2}) = \frac{12}{a^4}\int_0^{a/2} x^2(a - x)dx = \frac{5}{16}.$$

Per $0 < y < a/2$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq y + \frac{a}{2}) = \frac{12}{a^4} \int_0^{y+a/2} x^2(a-x)dx = 4(\frac{y}{a} + \frac{1}{2})^3 - 3(\frac{y}{a} + \frac{1}{2})^4.$$

Per $y \geq a/2$ ja tenim $F_Y(y) = 1$

(c) $P(Y = a/2) = 0$ ja que $F_Y(y)$ és contínua en aquest punt. $P(Y = 0) = 5/16$ que és el salt de F_Y en $y = 0$.