Modelat i Simulació de Sistemes Dinàmics

Pràctica 1

1 Rutines d'integració de Matlab

L'elecció del mètode d'integració d'una equació diferencial, és a dir, com es converteix l'equació diferencial en una equació en diferències, pot tenir resultats dramàtics respecte a la qualitat del resultat final. Matlab proporciona fins a 7 integradors diferents, i cadascun d'ells permet diverses opcions. La llista, treta directament de l'ajuda de Matlab, és la següent:

Solver	Problem Type	Order of Accuracy	When to Use
ode45	Nonstiff	Medium	Most of the time. This should be the first solver you try.
ode23	Nonstiff	Low	If using crude error tolerances or solving moderately stiff problems.
ode113	Nonstiff	Low to high	If using stringent error tolerances or solving a computationally intensive ODE file.
ode15s	Stiff	Low to medium	If ode45 is slow because the problem is stiff.
ode23s	Stiff	Low	If using crude error tolerances to solve stiff systems and the mass matrix is constant.
ode23t	Moderately Stiff	Low	If the problem is only moderately stiff and you need a solution without numerical damping.
ode23tb	Stiff	Low	If using crude error tolerances to solve stiff systems.

Amb aquests mètodes, Matlab pot solucionar sistemes d'equacions de la forma

$$M(t,y)y' = f(t,y)$$

on $y \in \mathbb{R}^n$ i M és una matriu $n \times n$, anomenada la *matriu de massa* del sistema. Si M no té el rang màxim, el sistema és de fet una DAE (differential-algebraic equation), i llavors s'ha d'anar amb cura perquè no qualsevol condició inicial $y(0)$ és acceptable.

En el Tema 3 veurem tot això en detall, però ara, seguint el consell de Matlab, sols utilitzarem `ode45`. Aquest és el que s'anomena un Runge-Kutta(4,5) explícit, i és un mètode d'un sol pas: per calcular $y(t_n)$ sols necessita $y(t_{n-1})$.

2 Drivers d'integració

El primer que cal fer per usar `ode45` (o qualsevol altre) és definir una funció que ens descrigui el sistema. Això es fa mitjançant un M-file. Sigui per exemple el sistema de dimensió 3

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2\, y_3 \\ \dot{y}_2 &= -y_1\, y_3 \\ \dot{y}_3 &= -0.51\, y_1\, y_2 \end{aligned}$$

amb les condicions inicials $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = -1$, $y_3(0) = 0$. Escrivim llavors el M-file

```
%rigid (t,y)
function dy=rigid(t,y)
if(nargin==2)
    dy=zeros(3,1);
    dy(1)=y(2)*y(3);
    dy(2)=-y(1)*y(3);
    dy(3)=-0.51*y(1)*y(2);
end
```

i ho guardem com `rigid.m`. A la finestra de comandes de Matlab, definim ara el conjunt d'opcions de control de l'error que passarem a l'integrador:

```
>> options=odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-4 1e-4 1e-5]);
```

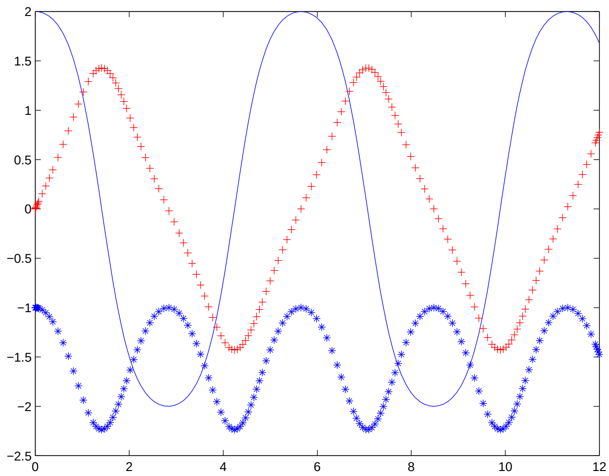
Això estableix un error relatiu de 10^{-4} per a totes les components de la solució i uns errors absoluts 10^{-4}, 10^{-4} i 10^{-5}, respectivament, per a cadascuna de les components. Ara podem ja cridar la rutina, i és aquest el moment de dir-li quines són les condicions inicials i l'interval d'integració:

```
>> [T,Y]=ode45(@rigid,[0,12],[2,-1,0],options);
```

Això integrarà entre $t = 0$ (on tenim les condicions inicials) i $t = 12$. El primer argument `@rigid` crida la funció que ens defineix el sistema. Per veure totes les components (amb diferents símbols i colors) fem

```
>> plot(T,Y(:,1),'-b',T,Y(:,2),'*b',T,Y(:,3),'+r')
```

Hauria de sortir quelcom semblant a això:



3 Exercicis

1. Sigui l'equació diferencial
$$\ddot{x} = 0.1 \sin x + \cos t$$
amb $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

   (a) Escriviu-la com un sistema de dues equacions de primer ordre.

   (b) Integreu-la entre $t = 0$ i $t = 100$, i dibuixeu la primera component de la solució en aquest interval.

   (c) L'entrada del sistema és $\cos t$, que té freqüència $\omega_0 = 1$. Quines freqüències s'observen a la solució? (hauríeu de detectar un subharmonic; això passa degut a que el sistema és nolineal; en sistemes lineals, la solució sols pot mostrar les freqüències d'entrada).

(d) (opcional) Cerqueu informació sobre com fer FFT amb Matlab i intenteu confirmar la resposta que heu donat a l'apartat anterior.

2. Recuperem el sistema de condensador/bobina que ja hem estudiat a classe, posant $L = 3$ i $C = 2$:

$$\begin{pmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ q \end{pmatrix}$$

amb condicions inicials $\lambda(0) = 0$, $q(0) = 5$.

   (a) Calculeu l'expressió de l'energia de la bobina (en funció de λ) i la del condensador (en funció de q).

   (b) Integreu el sistema entre $t = 0$ i $t = 50$ i representeu l'energia de la bobina, la del condensador i la total. És coherent el que surt amb el que espereu?

3. L'exercici anterior no té molta gràcia des del punt de vista numèric donat que la solució es pot trobar analíticament, tal com vàrem fer a classe. Considereu de nou la bobina acoblada al condensador però ara amb un condensador no lineal:

$$\begin{aligned} v_C &= 2q + 0.3q^3 \\ i_L &= 1.5\lambda. \end{aligned}$$

   (a) Escriu les equacions diferencials del sistema.

   (b) Calcula l'energia del condensador (en funció de q) i la de la bobina (en funció de λ).

   (c) Integra el sistema entre $t = 0$ i $t = 30$, amb les condicions inicials $q(0) = 2$, $\lambda(0) = 0$, i representa les dues components. Observa la diferència respecte al cas lineal.

   (d) Representa l'energia del condensador i l'energia total del sistema.

Avaluació de la pràctica

Envieu-me al Campus Digital les gràfiques de 1(b), 3(c) i 3(d), i passeu-me (abans d'acabar la sessió) un full amb els càlculs (a ma) dels apartats 1(a), 2(a), 3(a) i 3(b). En cada cas poseu els noms i cognoms de tots els participants. No s'admeten grups amb més de dues persones sense autorització meva prèvia.