1

Modelado de Sistemas Dinámicos
(BOND GRAPH)
José Cesáreo Raimúndez Álvarez
octubre de 1999

2

3

Introducción

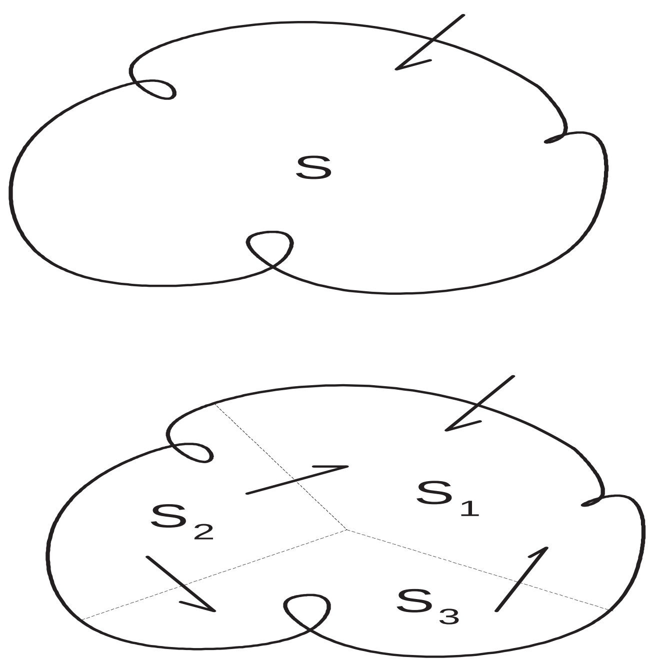
El formalismo del BOND GRAPH permite el modelado de sistemas de ingeniería en diversos campos:

- Mecánica.
- Electricidad.
- Hidráulica.
- Termología.
- Etc.

El primer paso consiste en fraccionar el sistema en sub sistemas teniendo por base la transferencia de potencia entre ellos. La transferencia se describe gráficamente por los *puertos*.

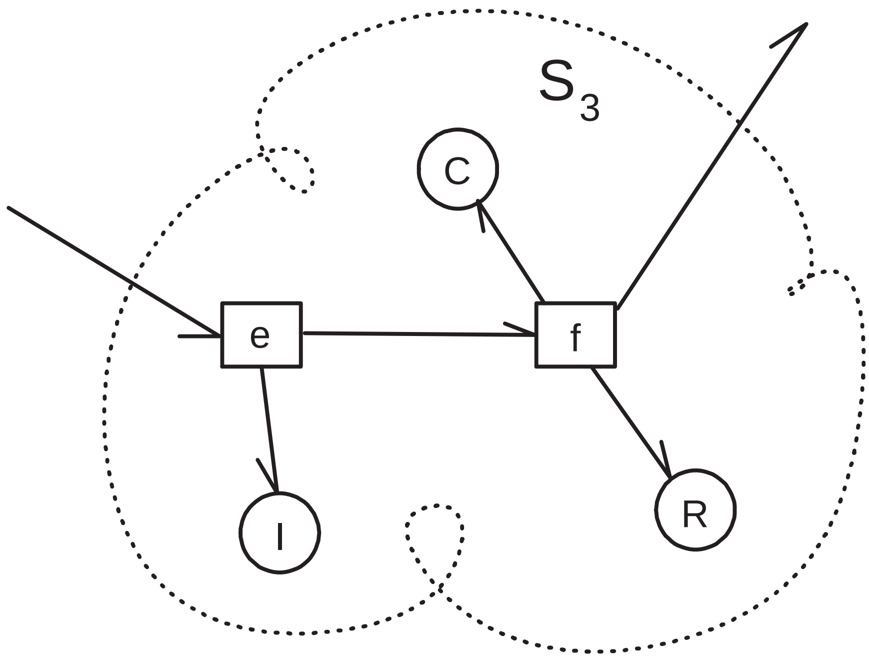
4

Partición



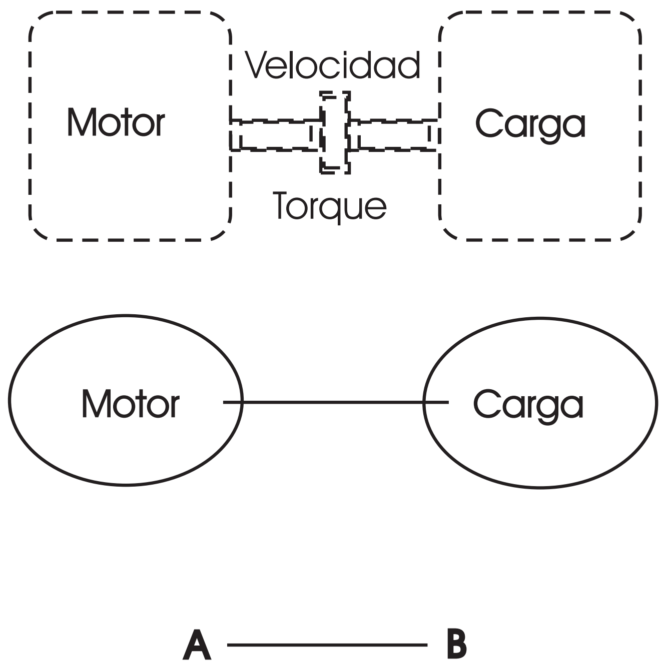
Sub Partición

5



6

Puertos de Energía



7

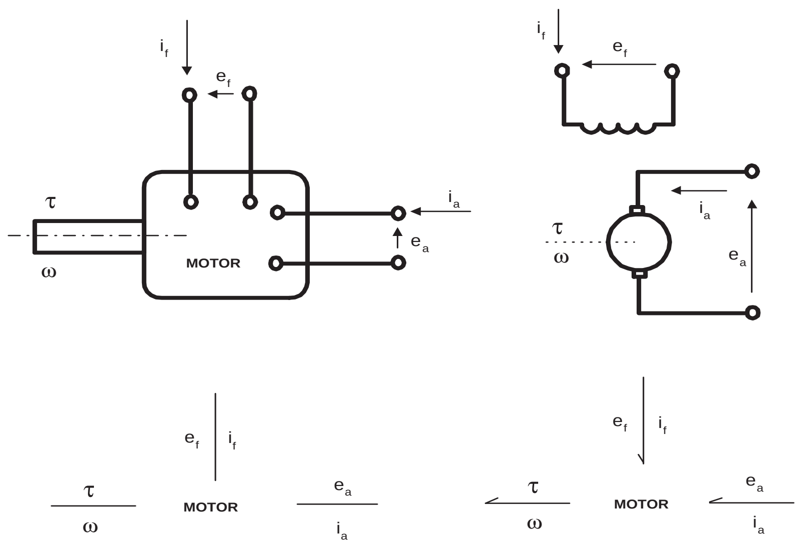
Algunos Tipos de Interfases		
Dominio	**Esfuerzo** $e(t)$	**Flujo** $f(t)$
MECÁNICA (ROT)	torque $\tau(t)$	rotación $\omega(t)$
MECÁNICA (LIN)	fuerza $F(t)$	velocidad $V(t)$
ELÉCTRICA	voltaje $e(t)$	corriente $i(t)$
HIDRÁULICA	presión $P(t)$	caudal $Q(t)$

NOMENCLATURA		
Variables	**Dominio**	**Unidades**
	MECÁNICA (LIN)	
Esfuerzo e	Fuerza F	[N]
Flujo f	Velocidad V	[m/s]
Momento p	Momento P	[N·s]
Desplazamiento q	Desplazamiento X	[m]
Potencia $\mathcal{P}$	$F(t)V(t)$	[N·m/s]
Energía $\mathcal{E}$	$\int^X FdX, \int^P VdP$	[N·m]
	MECÁNICA (ROT)	
Esfuerzo e	Torque τ	[N·m]
Flujo f	Vel. Angular ω	[rad/s]
Momento p	Momento Angular p	[N·m·s]
Desplazamiento q	Ángulo θ	[rad]
Potencia $\mathcal{P}$	$\tau(t)\omega(t)$	[N·m/s]
Energía $\mathcal{E}$	$\int^\theta \tau d\theta, \int^p \omega dp$	[N·m]
	ELÉCTRICA	
Esfuerzo e	Voltaje e	[V] = [N·m/C]
Flujo f	corriente i	[A] = [C/s]
Momento p	Flujo Concatenado λ	[V·s]
Desplazamiento q	Carga q	[C] = [A·s]
Potencia $\mathcal{P}$	$e(t)i(t)$	[V·A]=[W]=[N·m/s]
Energía $\mathcal{E}$	$\int^q edq, \int^\lambda id\lambda$	[V·A·s] = [W·s] = [N·m]
	HIDRÁULICA	
Esfuerzo e	Presión P	[N/m^2]
Flujo f	Caudal Q	[m^3/s]
Momento p	Momento p_P	[N·s/m^2]
Desplazamiento q	Volumen V	[m^3]
Potencia $\mathcal{P}$	$P(t)Q(t)$	[N·m/s]
Energía $\mathcal{E}$	$\int^V PdV, \int^{p_P} Qdp_P$	[N·m]

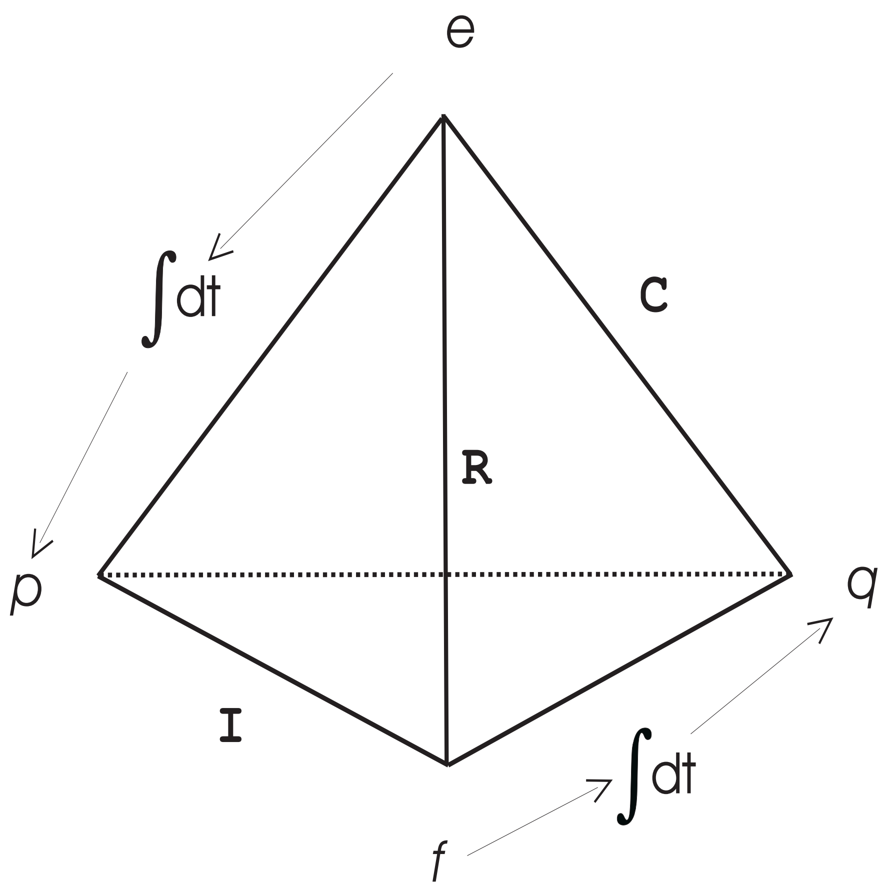
8

9

Motor de Corriente Continua



Tetraedro de Estado



10

Elementos Resistivos ($\rightharpoonup$R)

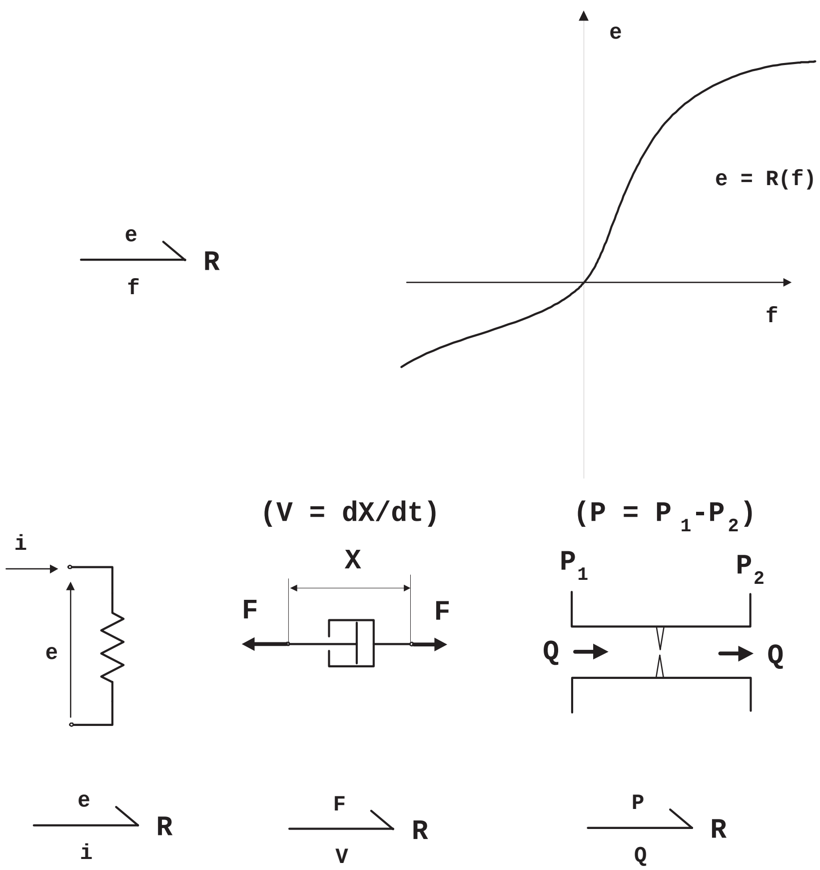
11 El elemento *resistencia* típico es el elemento en el que las variables *esfuerzo-flujo* están relacionadas entre sí a través de una función estática.

$$\mathcal{E}_R = \int_0^t e(t) f(t) dt$$

12

Resistencia (1-puerto)		
Variables	**General**	**Lineal**
Esfuerzo e Flujo f	$e = \Phi(f)$ $f = \Phi^{-1}(e)$	$e = Rf$ $f = Ge = e/R$
	MECÁNICA (TRANS)	
fuerza F velocidad V	$F = \Phi(V)$ $V = \Phi^{-1}(F)$	$F = bV$
	MECÁNICA (ROT)	
torque τ rotación ω	$\tau = \Phi(\omega)$ $\omega = \Phi^{-1}(\tau)$	$\tau = c\omega$
	ELÉCTRICA	
tensión e corriente i	$e = \Phi(i)$ $i = \Phi^{-1}(e)$	$e = Ri$ $i = Ge$
	HIDRÁULICA	
presión P caudal Q	$P = \Phi(Q)$ $Q = \Phi^{-1}(P)$	$P = RQ$

Elementos Resistivos



Elementos Capacitivos (—C)

Los elementos capacitivos se caracterizan por tener relacionadas las variables *esfuerzo-flujo* a través de una relación del tipo:

4

$$e = e(q)$$

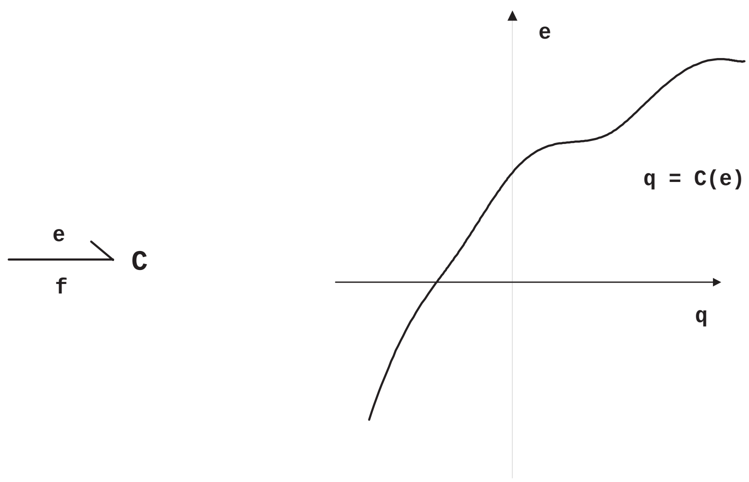
donde $q = \int f dt$. Conforme puede observarse, la relación que une ahora las variables *esfuerzo-flujo*, no es más estática y sí dinámica.

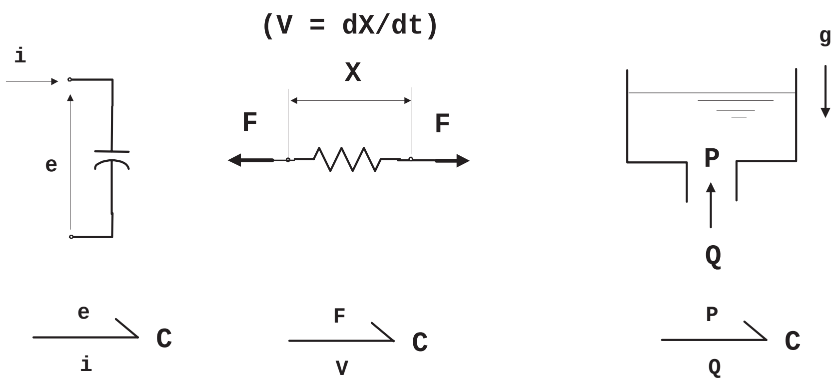
$$\mathcal{E}_C = \int_0^t e(t)f(t)dt = \int_{q_0}^{q} \Phi^{-1}(q)dq = \mathcal{E}(q)$$

Capacitancia (1-puerto)		
Variables	**General**	**Lineal**
Desplazamiento q	$q = \Phi(e)$	$q = Ce$
Esfuerzo e	$e = \Phi^{-1}(q)$	$e = q/C$
	MECÁNICA (TRANS)	
desplazamiento X	$X = \Phi(F)$	$X = CF$
fuerza F	$F = \Phi^{-1}(X)$	$F = kX$
	MECÁNICA (ROT)	
ángulo θ	$\theta = \Phi(\tau)$	$\theta = C\tau$
torque τ	$\tau = \Phi^{-1}(\omega)$	$\tau = k\theta$
	ELÉCTRICA	
carga q	$q = \Phi(e)$	$q = Ce$
tensión e	$e = \Phi^{-1}(q)$	$e = q/C$
	HIDRÁULICA	
volumen V	$V = \Phi(P)$	$V = CP$
presión P	$P = \Phi^{-1}(V)$	$P = P/V$

5

Elementos Capacitivos





16

Elementos Inductivos (inercias)(—–I)

Los elementos inductivos se caracterizan por tener relacionadas las variables *esfuerzo-flujo* a través de una relación del tipo:

$$f = f(p)$$

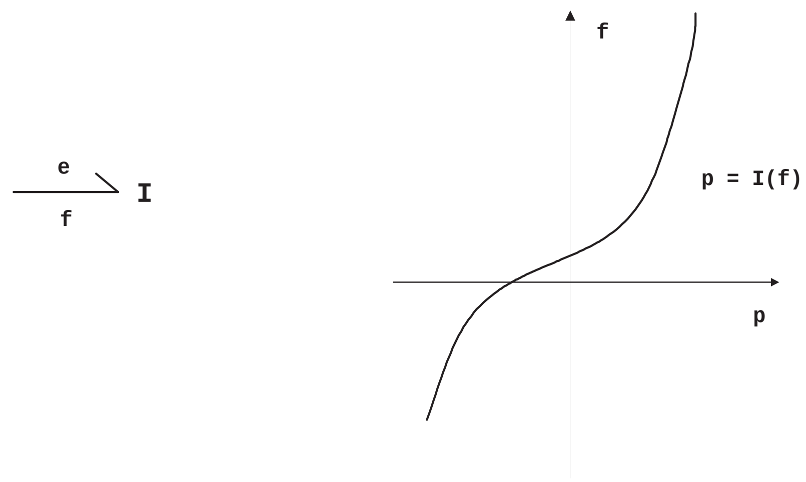
donde $dp = edt$. Conforme puede observarse, la relación que une ahora las variables *esfuerzo-flujo*, también es dinámica.

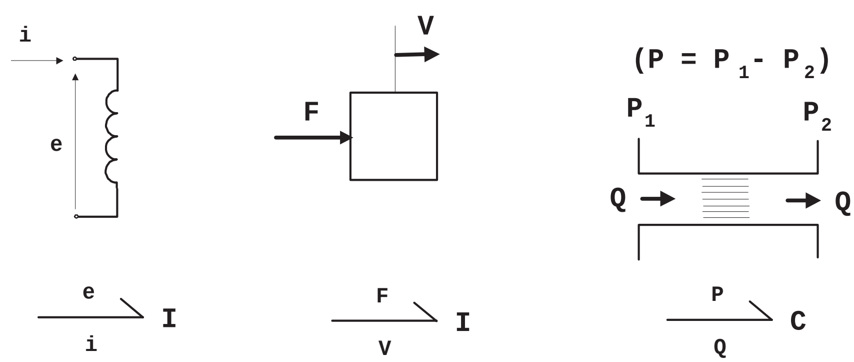
$$\mathcal{E}_I = \int_0^t e(t)f(t)dt = \int_{p_0}^{p} \Phi^{-1}(p)dp = \mathcal{E}(p)$$

Inductancia (1-puerto)		
Variables	**General**	**Lineal**
Momento p	$p = \Phi(f)$	$p = If$
Flujo f	$f = \Phi^{-1}(p)$	$f = p/I$
	MECÁNICA (TRANS)	
momento lin. p	$p = \Phi(V)$	$p = mV$
velocidad F	$V = \Phi^{-1}(p)$	$V = p/m$
	MECÁNICA (ROT)	
momento ang. p	$p = \Phi(\omega)$	$p = J\omega$
torque τ	$\omega = \Phi^{-1}(p)$	$\omega = p/J$
	ELÉCTRICA	
flujo conc. λ	$\lambda = \Phi(i)$	$\lambda = Li$
tensión e	$i = \Phi^{-1}(\lambda)$	$i = \lambda/L$
	HIDRÁULICA	
momentum p	$p = \Phi(Q)$	$p = IQ$
caudal Q	$Q = \Phi^{-1}(p)$	$Q = p/I$

8

Elementos Inerciales



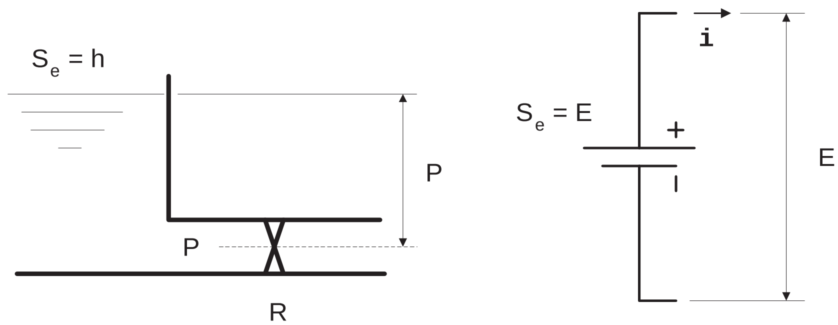


19

Fuentes S ——

Los elementos considerados como *elementos fuente* son modelos de dispositivos que imprimen potencia, ya sea a esfuerzo constante S_e —— o a flujo constante S_f ——. Una pila en electricidad podría, en su representación simplificada con la resistencia interna nula, ser representada por un elemento S_e —— donde el esfuerzo está asociado a la tensión constante y lo variable es el flujo o corriente.

Fuentes



Transformador $(\!-\!\!-\, TR \,-\!\!-\!)$

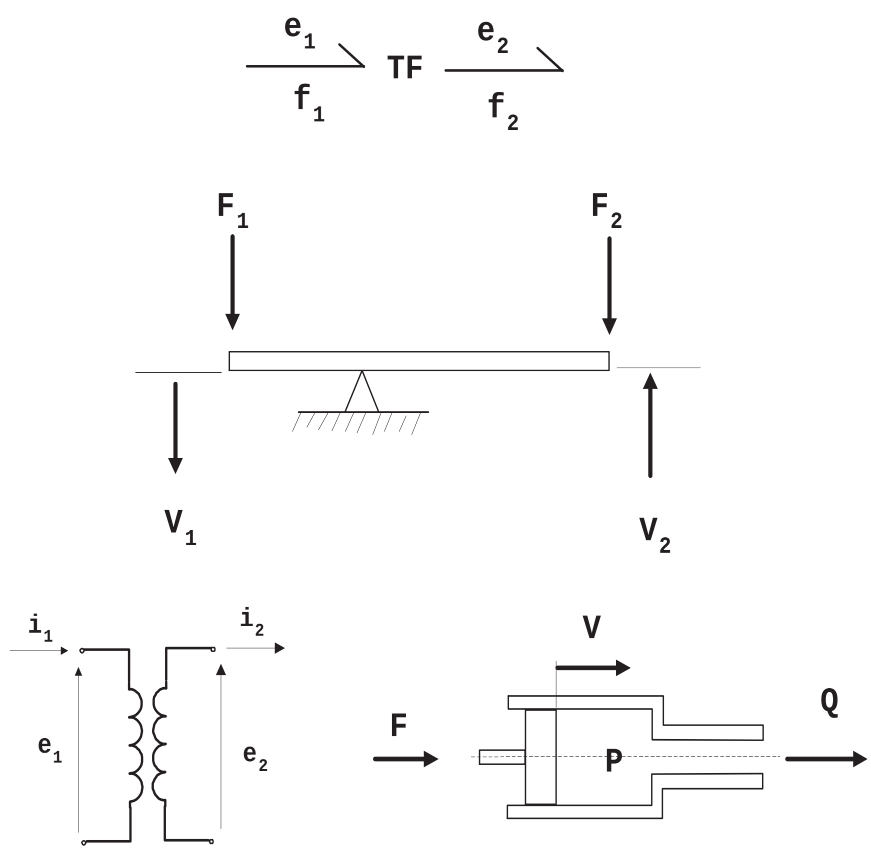
El transformador se caracteriza por poseer las relaciones constitutivas que siguen.

22

$$\begin{aligned} e_1(t) &= ke_2(t) \\ kf_1(t) &= f_2(t) \end{aligned} \tag{1}$$

$$(\!-\!\!-\, TR \,-\!\!-\, TR \,-\!\!-\; \equiv \;-\!\!-\, TR \,-\!\!-\!)$$

Transformadores



23

Girador (— GI —)

El girador se caracteriza por las relaciones constitutivas

24

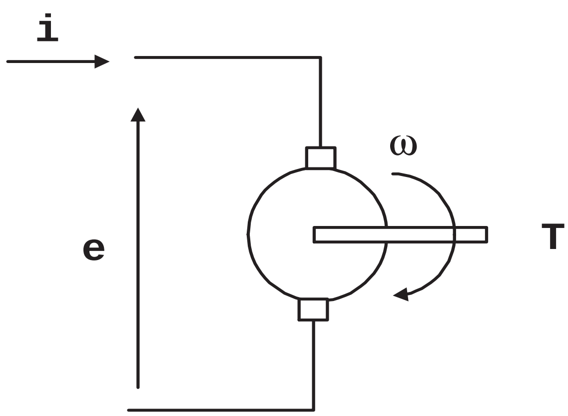
$$
\begin{aligned}
e_1(t) &= r f_2(t) \\
r f_1(t) &= e_2(t)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$(\text{—}\, GI_1 \,\text{—}\, GI_2 \,\text{—} \neq \text{—}\, GI_2 \,\text{—}\, GI_1 \,\text{—})$$

Giradores

$$\xrightharpoondown[f_1]{e_1}\ \mathbf{GI}\ \xrightharpoondown[f_2]{e_2}$$

25



$$T = K_t\, i$$
$$e = K_t\, \omega$$

Uniones tipo 0 (esfuerzo e común)

Considerando una unión tipo 3-puertos se puede representar como:

$$\begin{array}{c} | \\ —\ 0\ — \end{array} \quad \text{o alternativamente} \quad \begin{array}{c} | \\ —\ e\ — \end{array}$$

Aquí valen las relaciones:

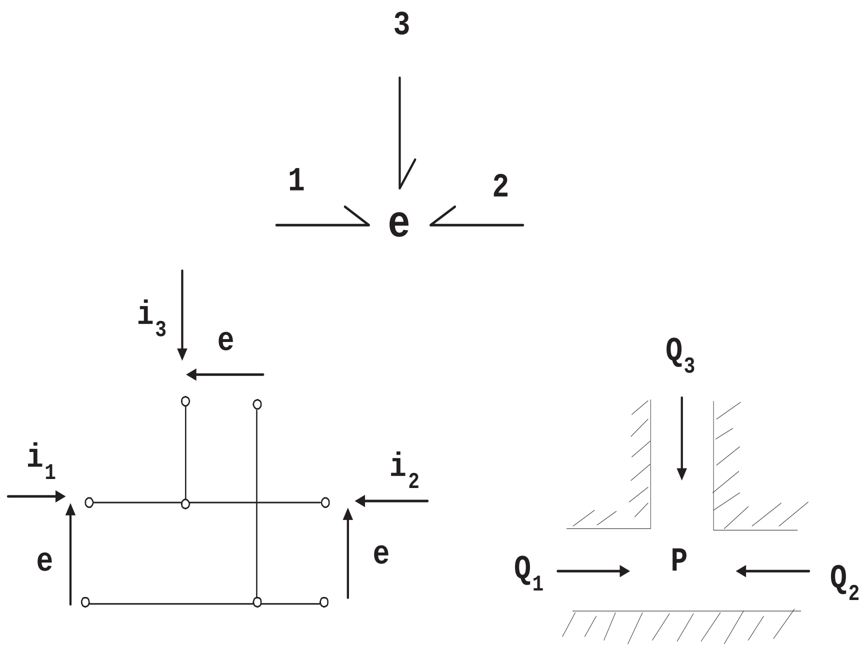
26

$$\begin{aligned} e_1(t) &= e_2(t) \\ e_1(t) &= e_3(t) \\ e_2(t) &= e_3(t) \\ f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

lo que implica en:

$$e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_3 f_3 = 0$$

Uniones de esfuerzo común



27

Uniones tipo 1 (flujo f común)

Considerando una unión tipo 3-puertos se puede representar como:

$$\begin{array}{c} | \\ \text{—}\,1\,\text{—} \end{array} \quad \text{o alternativamente} \quad \begin{array}{c} | \\ \text{—}\,f\,\text{—} \end{array}$$

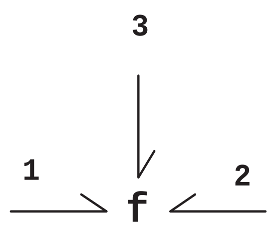
Aquí valen las relaciones:

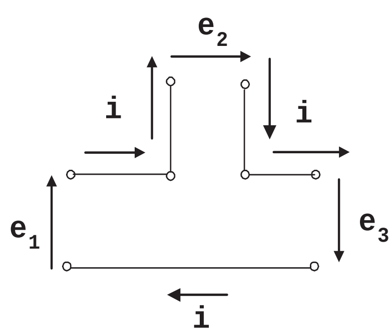
$$\begin{aligned} f_1(t) &= f_2(t) \\ f_1(t) &= f_3(t) \\ f_2(t) &= f_3(t) \\ e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

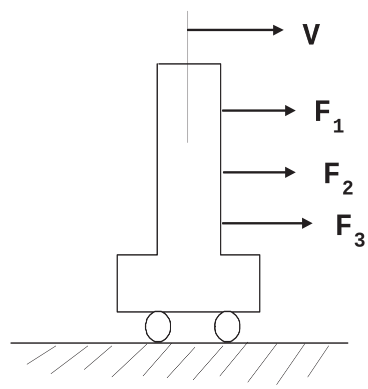
lo que implica en:

$$e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_3 f_3 = 0$$

Uniones de flujo común

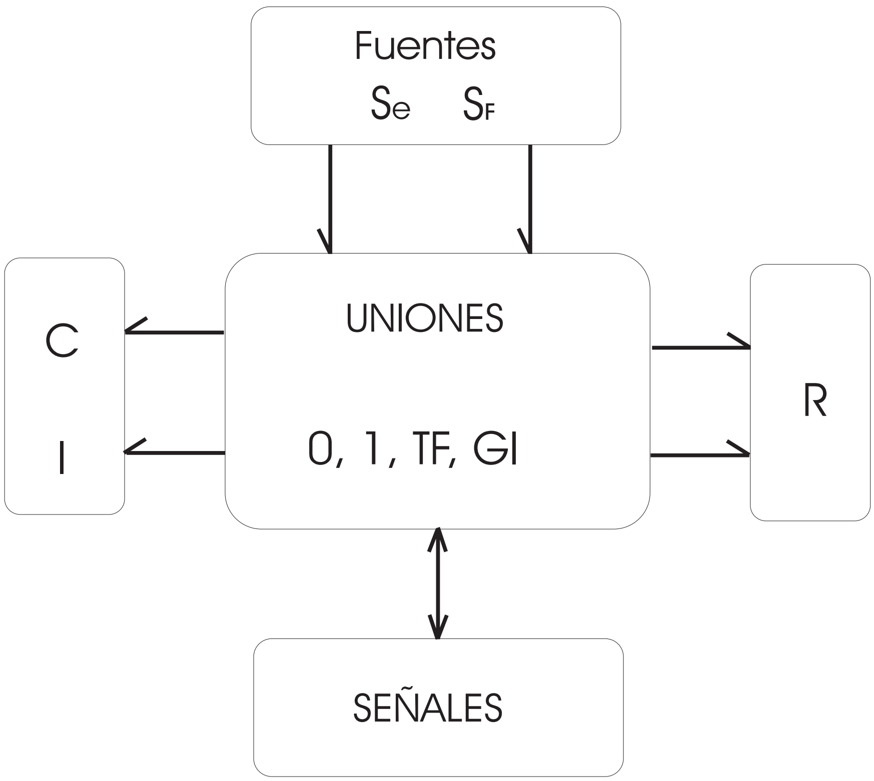






29

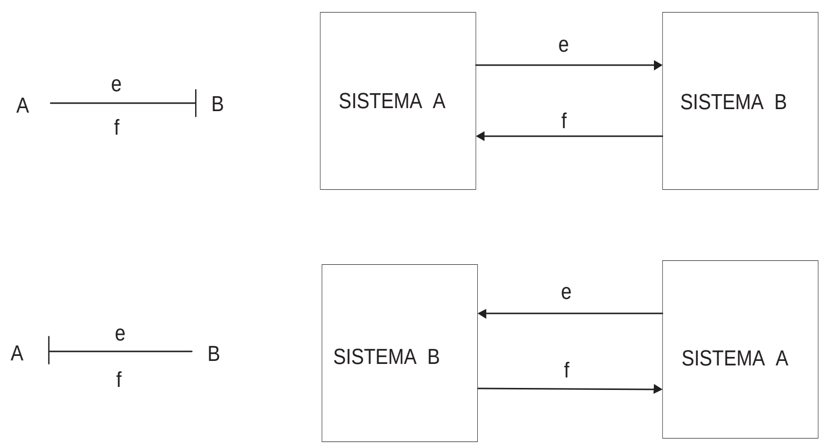
Estructura General



Causalidad

La marca de causalidad se sitúa en la extremidad del puerto que recibe el esfuerzo (respetada la formulación integral).

31



Causalidades Típicas

Capacitancias

$$C \;\overset{e}{\underset{f}{\text{——}}}\!| \quad \text{o también} \quad |\!\overset{e}{\underset{f}{\text{——}}}\; C \qquad \left(e(t) = C^{-1}\int_0^t f(\tau)d\tau\right)$$

Indutancias

$$I \;|\!\overset{e}{\underset{f}{\text{——}}} \quad \text{o también} \quad \overset{e}{\underset{f}{\text{——}}}\!|\; I \qquad \left(f(t) = L\int_0^t e(\tau)d\tau\right)$$

32

Resistencias

$$R \;\overset{e}{\underset{f}{\text{——}}}\!| \quad \text{o también} \quad |\!\overset{e}{\underset{f}{\text{——}}}\; R$$

$$R \;|\!\overset{e}{\underset{f}{\text{——}}} \quad \text{o también} \quad \overset{e}{\underset{f}{\text{——}}}\!|\; R$$

Fuentes (Esfuerzo)

$$S \;\overset{e}{\underset{f}{\text{——}}}\!| \quad \text{o también} \quad |\!\overset{e}{\underset{f}{\text{——}}}\; S$$

33

Fuentes (Flujo)

$$S \vdash\!\overset{e}{\underset{f}{\rule{2em}{0.4pt}}} \quad \text{o también} \quad \overset{e}{\underset{f}{\rule{2em}{0.4pt}}}\!\dashv S$$

Transformadores

$$\dashv TR \dashv \quad \text{o bien} \quad \vdash TR \vdash$$

Giradores

$$\dashv GI \vdash \quad \text{o bien} \quad \vdash GI \dashv$$

Uniones tipo 0 (esfuerzo e común)

$$\dashv \overset{\top}{e} \dashv \qquad \vdash \overset{\perp}{e} \dashv \qquad \vdash \overset{\top}{e} \vdash$$

Uniones tipo 1 (flujo f común)

$$\vdash \overset{\perp}{f} \vdash \qquad \dashv \overset{\top}{f} \vdash \qquad \dashv \overset{\perp}{f} \dashv$$

Funciones de Transferencia

Para sistemas lineales invariantes en el tiempo: e_1, f_1 y e_2, f_2 son variables de salida y entrada siendo $\mathcal{F}$ una transformación lineal. Si ahora

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e_1 \\ f_1 \end{bmatrix} &= \mathcal{F}\left(\begin{bmatrix} e_2 \\ f_2 \end{bmatrix}\right) \\ \begin{bmatrix} e_1' \\ f_1' \end{bmatrix} &= \mathcal{F}\left(\begin{bmatrix} e_2' \\ f_2' \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

principio de superposición.

$$\begin{bmatrix} e_1 + e_1' \\ f_1 + f_1' \end{bmatrix} = \mathcal{F}\left(\begin{bmatrix} e_2 + e_2' \\ f_2 + f_2' \end{bmatrix}\right)$$

35

Uniones de Flujo común

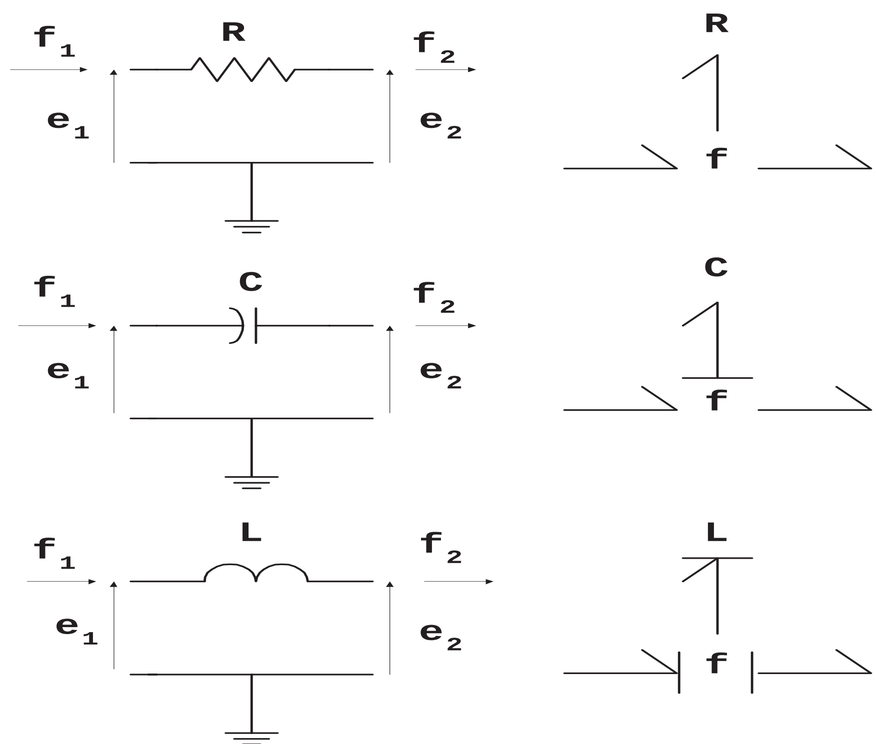


Figure 1: Elementos Eléctricos Lineales con flujo común

Elementos Resistivos

$$
\begin{aligned}
e_1 - e_2 &= R f_1 \\
f_1 &= f_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} e_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_2 \end{bmatrix}
$$

36

Elementos Capacitivos

$$
\begin{aligned}
e_1 - e_2 &= q_1/C \\
q_1 &= \int_0^t f_1 dt \\
f_1 &= f_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} e_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \int_0^t [*]/C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_2 \end{bmatrix}
$$

Elementos Inerciales

$$
\begin{aligned}
p_1 - p_2 &= L f_1 \\
p_i &= \int e_i \, dt \\
f_1 &= f_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} e_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L\frac{d[*]}{dt} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_2 \end{bmatrix}
$$

Transformada de Laplace

39

$$\begin{bmatrix} E_1(s) \\ F_1(s) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & G(s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E_2(s) \\ F_2(s) \end{bmatrix}$$

40

Uniones de Esfuerzo común

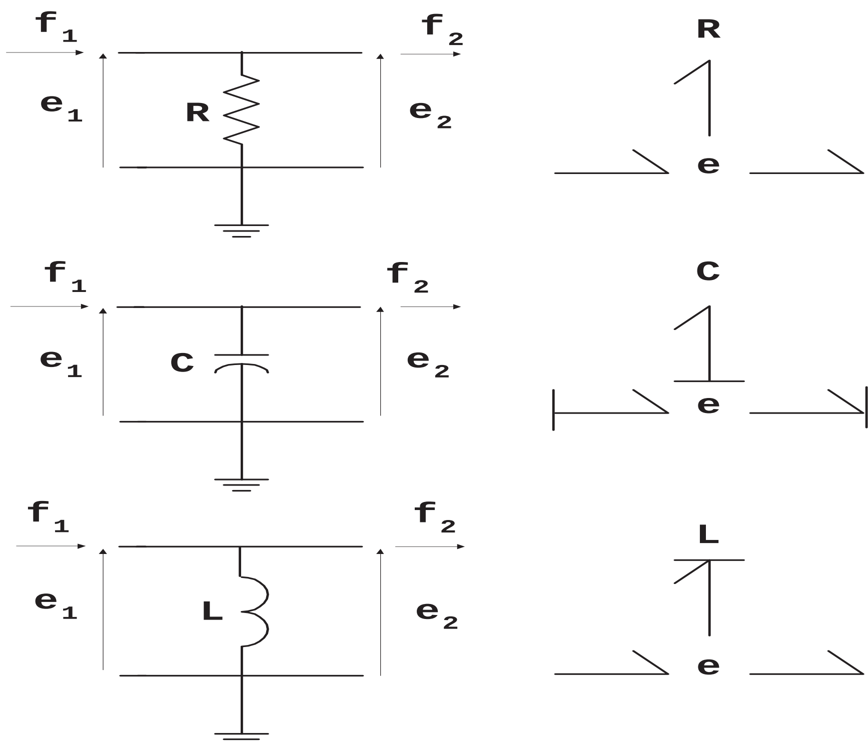


Figure 2: Elementos Eléctricos Lineales con Esfuerzo común

Elementos Resistivos

$$\begin{aligned} e_1 &= e_2 \\ f_1 - f_2 &= e_2/R \end{aligned}$$

41

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ R^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Elementos Capacitivos

42

$$
\begin{aligned}
e_1 &= e_2 \\
q_1 - q_2 &= C e_2 \\
q_i &= \int_0^t f_i dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} e_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C\frac{d[*]}{dt} & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_2 \end{bmatrix}
$$

Elementos Inerciales

43

$$\begin{aligned} e_1 &= e_2 \\ f_1 - f_2 &= L^{-1} \frac{de_i}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ L^{-1} \int_0^t [*] dt & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Transformada de Laplace

$$\begin{bmatrix} E_1(s) \\ F_1(s) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y(s) & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E_2(s) \\ F_2(s) \end{bmatrix}$$

donde $Y(s) = G^{-1}(s)$.

Propiedades

$$
\begin{aligned}
\Pi_k \begin{pmatrix} 1 & G_k(s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \sum_k G_k(s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\Pi_k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y_k(s) & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sum_k Y_k(s) & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

matrices del mismo tipo conmutan:

45

$$
\begin{pmatrix} 1 & G_1(s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & G_2(s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & G_2(s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & G_1(s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

matrices de tipo distinto no conmutan:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & G(s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y(s) & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 + G(s)Y(s) & G(s) \\ Y(s) & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y(s) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & G(s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & G(s) \\ Y(s) & 1 + Y(s)G(s) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & C(s) & & I(s) & & R(s) & & & & G(s) & \\
 & | & & | & & | & & \equiv & & | & \\
\text{—} & f & \text{———} & f & \text{———} & f & \text{—} & & \text{—} & f & \text{—}
\end{array}
$$

$$G(s) = R + sI + \frac{1}{sC}$$

o también

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & C(s) & & I(s) & & R(s) & & & & Y(s) & \\
 & | & & | & & | & & \equiv & & | & \\
\text{—} & e & \text{———} & e & \text{———} & e & \text{—} & & \text{—} & e & \text{—}
\end{array}
$$

$$Y(s) = \frac{1}{R} + \frac{1}{sI} + sC$$

Celdas GI

$$\begin{array}{ccc} G(s) & & Y(s) \\ | & & | \\ -\!\!-\, f \,-\!\!- & -\!\!- & e \,-\!\!- \end{array}$$

Discretización de Medios Continuos

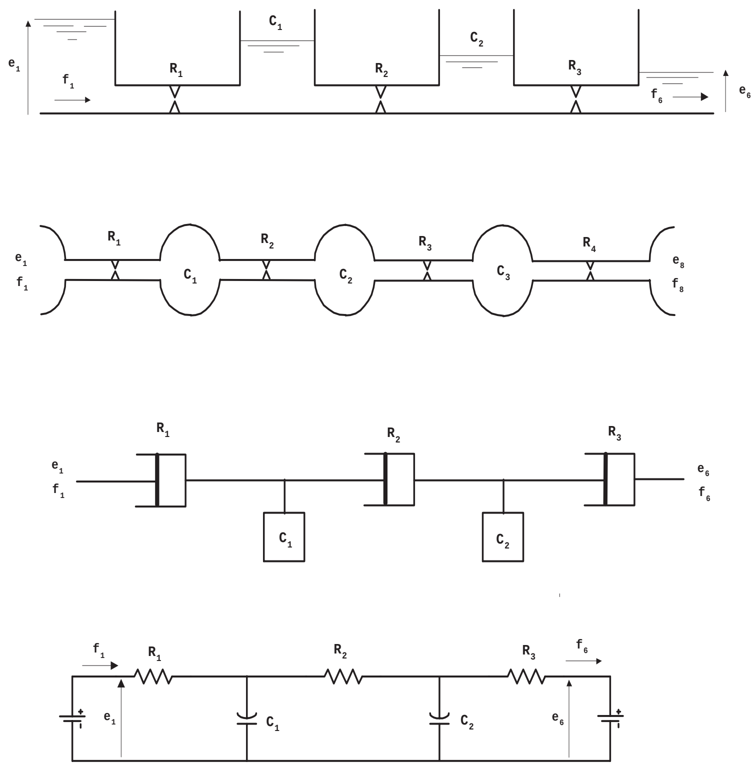


Figure 3: Líneas de Transmisión de energía

...

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & R_1 & & C_1 & & R_2 & & C_2 & & R_3 & & C_3 & \\
 & | & & | & & | & & | & & | & & | & \\
— & f & — & e & — & f & — & e & — & f & — & e & —
\end{array}$$

49

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ sC_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & R_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ sC_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & R_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} e_6 \\ f_6 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 + (C_1R_1 + C_2R_2 + C_2R_1)s + C_1R_1C_2R_2s^2 & \begin{array}{c}(R_1 + R_2 + R_3) + (C_1R_1R_2 + C_1R_1R_3 + C_2R_2R_3 + \\ C_2R_1R_3)s + C_1C_2R_1R_2R_3s^2\end{array} \\ (C_1 + C_2)s + C_1C_2R_2s^2 & 1 + (C_1R_3 + C_2R_3 + C_1R_2)s + C_1R_1C_2R_2R_3s^2 \end{pmatrix}$$

Se desea que para finalidades de transmisión de energía, se verifique lo mejor posible, la igualdad

$$M = I$$

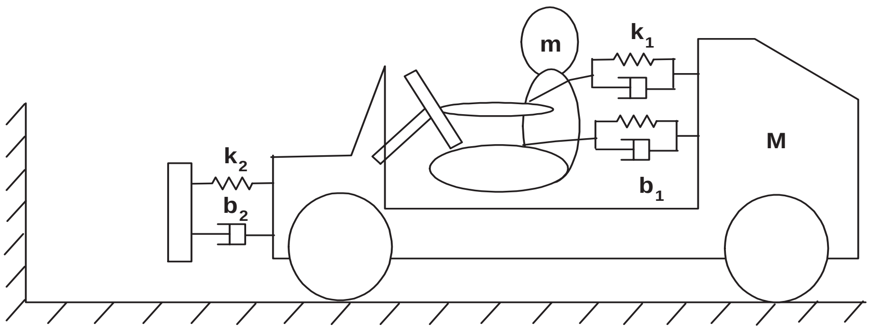
50

$$\begin{bmatrix} e_1(s) \\ f_1(s) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}(s) & m_{12}(s) \\ m_{21}(s) & m_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} e_2(s) \\ f_2(s) \end{bmatrix} \qquad f_2(s) = g(s)e_2(s)$$

$$\begin{aligned} e_1(s)/e_2(s) &= \frac{m_{22}(s) - m_{12}(s)g(s)}{\Delta(s)} \\ f_1(s)/e_2(s) &= \frac{m_{11}(s)g(s) - m_{12}(s)}{\Delta(s)} \end{aligned}$$

$$\Delta(s) = m_{11}(s)m_{22}(s) - m_{12}(s)m_{21}(s)$$

Modelado Típico

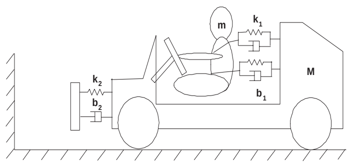


51

Parámetros
Típicos:

M = 1500 kg.
m = 100 kg.
k_1 = 1×10^3N/m.
b_1 = 500 N-s/m.
k_2 = 3×10^4N/m.
b_2 = 8×10^4 N-s/m.

Pseudo BOND GRAPH



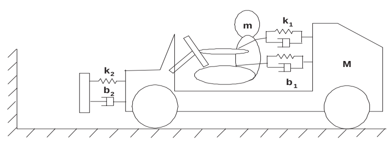
52

PASAJERO —— CINTURÓN

COCHE

PARED —— PARACHOQUES

Conexiones tipo 1 (flujo común)



V_s

53

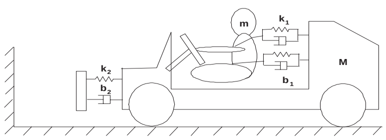
V_{pared} V_{coche} $V_{pasajero}$

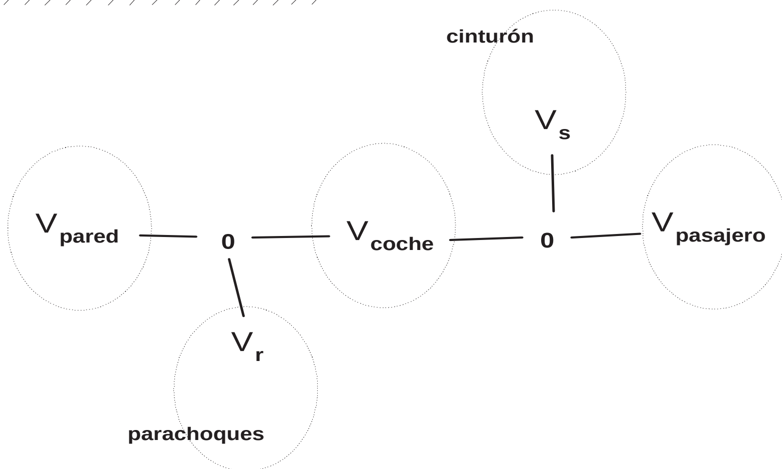
V_r

$$V_s = V_{coche} - V_{pasajero}$$

$$V_r = V_{coche} - V_{pared}$$

Conexiones tipo 0 (esfuerzo) y tipo 1 (flujo común)



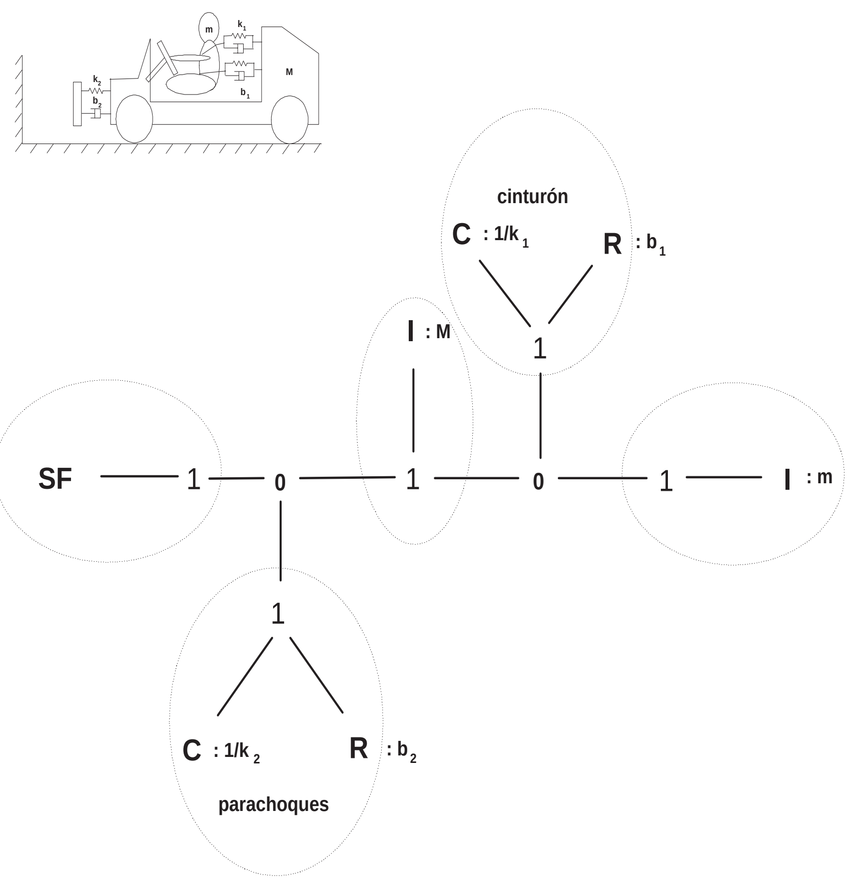


54

$$V_s = V_{coche} - V_{pasajero}$$

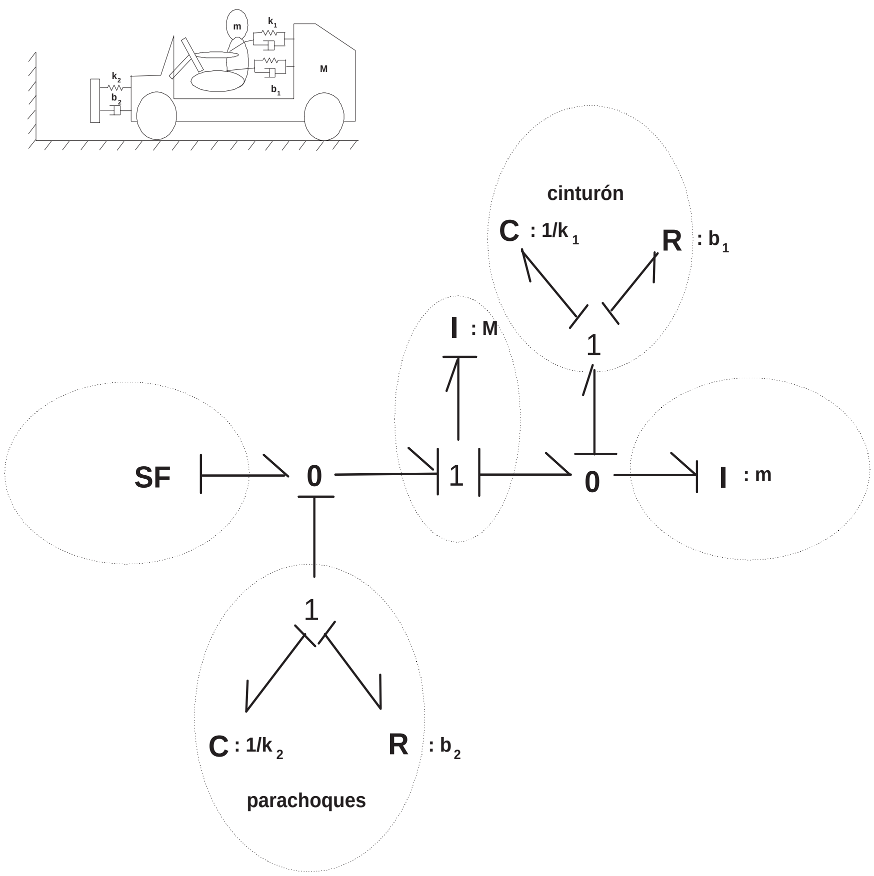
$$V_r = V_{coche} - V_{pared}$$

BOND GRAPH del sistema



55

BOND GRAPH final reducido



Resultados de Simulación