Teoria de Control Moderna

(Notes provisionals. Carles Batlle, febrer 1998)

1 Introducció

1.1 Sistemes de control

La forma més general d'un sistema de control determinista en temps continu és

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u,\theta,\eta,t) \\ y &= h(x), \end{aligned} \tag{1}$$

on $x(t) \in \mathbb{R}^n$ (les **variables d'estat**) és un vector que descriu l'estat del sistema en temps t, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ és un vector que descriu els controls de qué es disposa per influir sobre el sistema (les **entrades** del sistema), $\theta(t) \in \mathbb{R}^p$ és un vector de pertorbacions, *i.e.* funcions depenents del temps que no podem controlar i de les que es disposa d'informació molt limitada, $\eta \in \mathbb{R}^q$ és un vector de paràmetres corresponents a constants físiques del sistema, el valor de les quals podem conèixer exactament o no, i finalment $y(t) \in \mathbb{R}^s$ és un vector que representa les variables que podem mesurar (les **sortides** del sistema) i és una funció $h(x)$ de les variables d'estat. El vector $f(x,u,\theta,\eta,t)$, el **camp vectorial del sistema**, determina un sistema d'equacions diferencials de primer ordre. Si f no depén explícitament de t, que és el cas que considerarem, es diu que el sistema és **autònom**.

Si el camp vectorial f és una funció lineal de les variables x, u i θ i la funció $h(x)$ és lineal en x, es diu que el sistema és **lineal**, i en aquest cas el podem representar amb matrius

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Q\theta \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{2}$$

on A és $n \times n$, B és $n \times m$, Q és $n \times p$ i C és $s \times n$, i a on A, B i Q depenen dels paràmetres η. A la pràctica, molt pocs sistemes són exactament lineals, però sí que es pot suposar amb molts casos que la dependència en u i θ és lineal. S'obté llavors la representació

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u + q(x)\theta \\ y &= h(x), \end{aligned} \tag{3}$$

on $g(x)$ i $q(x)$ són matrius de les dimensions que pertoqui, els elements de les quals depenen de x, a més de η. Si $m = s = 1$, és a dir, si sols hi ha una entrada i una sortida, es diu que el sistema és **SISO** (acrònim de "single input - single output"), mentre que el cas general és coneix amb les sigles de **MIMO**. En aquestes notes tractarem majoritàriament els sistemes lineals SISO sense perturbacions ni paràmetres desconeguts. Les referències [1, 3, 6] contenen material més avançat.

Un problema de control consisteix en calcular $u(t)$ de manera que $y(t)$ satisfaci una sèrie de condicions. Si la $u(t)$ es construeix *a priori* com una funció del temps es diu que es té un control en **llaç obert**, mentre que si $u(t)$ es contrueix a partir de la sortida $y(t)$ en cada instant de temps, es diu que el control és en **llaç tancat** o **realimentat** (feedback). S'anomena **control robust** a aquell que permet satisfer les especificacions sobre $y(t)$ en presència de les $\theta(t)$, i **control adaptatiu** a aquell que treballa sense conèixer el valor d'alguns dels paràmetres η (amb o sense identificació dels mateixos com a resultat del control).

Si l'objectiu de control és portar $y(t)$ a un valor constant, llavors es parla d'un problema de **regulació** o **estabilització**; si es tracta de fer que $y(t)$ segueixi un senyal de referència $y_r(t)$, es parla d'un problema de **seguiment de senyal** ("signal tracking"). A més, la regulació es pot aconseguir amb diverses especificacions sobre el transitori ("rise time", "percent overshoot", "settling time") [4, 7]. Es diu que el sistema és **BIBO** ("bounded input - bounded output") si qualsevol entrada fitada en el temps produeix també una sortida fitada en el temps.

Exemple 1.1 *El sistema de control*

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u \\
y &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} x
\end{aligned}
$$

té un espai d'estat de dimensió 3*, dues entrades i una sortida (MISO). El sistema és lineal i no té perturbacions ni paràmetres desconeguts.*

Exemple 1.2 *El sistema de control*

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= 2x + u \\
y &= x
\end{aligned}
$$

és un sistema SISO amb espai d'estats de dimensió 1. *El sistema no és BIBO ja que, per exemple, l'entrada fitada* $u(t) = 0$ *produeix una sortida* $y(t) = x(t) = K \cdot e^{2t}$, *no fitada si* $K \neq 0$.

Exemple 1.3 *Un pèndol simple sotmés a una força tangencial de control* $u(t)$ *ve descrit per les equacions*

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\frac{g}{l}\sin\theta + \frac{1}{ml}u \\ y &= \theta \end{aligned}$$

on les variables d'estat són l'angle θ *i la velocitat angular* ω, *i suposem que la variable mesurable és* θ. *És un sistema SISO no lineal, i el problema es pot plantejar suposant que no es coneix la massa* m.

1.2 Transformacions de similitut i transformacions de realimentació

A vegades podem simplificar la representació d'estats d'un sistema de control lineal mitjançant una transformació lineal o **transformació de similitud**, donada per una matriu M constant no singular:

$$x \longrightarrow \tilde{x} = Mx \tag{4}$$

amb $\det M \neq 0$. Si suposem un sistema lineal sense perturbacions, (2) esdevé, en les noves variables,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= M\dot{x} = M(Ax + Bu) = MAM^{-1}\tilde{x} + MBu \\ y &= Cx = CM^{-1}\tilde{x}. \end{aligned} \tag{5}$$

El canvi lineal (4) indueix així la següent transformació de les matrius que defineixen el sistema lineal:

$$(A, B, C) \longrightarrow (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}) = (MAM^{-1}, MB, CM^{-1}). \tag{6}$$

En general, intentarem triar M de manera que $\tilde{A}$ sigui el més simple possible i resoldrem el problema de control en les noves variables $\tilde{x}$.

En la transformació (4) no hem tocat les variables de control u. Ens podem per tant plantejar canvis més generals, on apareixin noves variables de control que depenguin linealment de les antigues variables d'estat i dels antic controls. Això s'anomena una **transformació lineal de realimentació** i té la forma

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow \tilde{x} = Mx \\ u &\longrightarrow \tilde{u} = Rx + Su, \end{aligned} \tag{7}$$

amb M i S matrius inversibles. Tenim, en les noves variables,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= M\dot{x} = M(Ax + Bu) = M(AM^{-1}\tilde{x} + MS^{-1}(\tilde{u} - RM^{-1}\tilde{x})) \\ &= M(A - BS^{-1}R)M^{-1}\tilde{x} + MBS^{-1}\tilde{u} \\ y &= Cx = CM^{-1}\tilde{x}. \end{aligned} \tag{8}$$

i per tant podem representar simbòlicament la transformació mitjançant

$$(A, B, C) \longrightarrow (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}) = (M(A - BS^{-1}R)M^{-1}, MBS^{-1}, CM^{-1}). \tag{9}$$

Ara, a més de M, disposem de R i S, i això proporciona encara més llibertat per simplificar el problema en les noves variables. En realitat, aquesta llibertat és tant gran que tots els sistemes amb la mateixa n i amb $m = 1$ es poden convertir, mitjançant una transformació lineal de realimentació, en un sistema canònic de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Si $m > 1$ hi ha diverses possibilitats per a una mateixa n, però les matrius A i B que s'obtenen estan formades per blocs d'aquest mateix tipus (les anomenades formes canòniques de Brunovsky). Val a dir, però, que si el sistema original té paràmetres desconeguts, la transformació dependrà d'aquests paràmetres i per tant la solució del problema en la forma transformada no ens servirà de massa.

1.3 De la funció de transferència a la representació en espai d'estats

La teoria "clàssica" de control està basada en funcions de transferència [2, 4, 7] i no en equacions diferencials a l'espai d'estats. Veurem aquí com connectar les dues formulacions i introduirem diverses representacions canòniques [4, 1].

Un sistema SISO lineal i invariant en el temps ve caracteritzat per una funció de transferència

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{P(s)}{Q(s)}, \tag{11}$$

a on suposarem que la funció $H(s)$ és pròpia, és a dir, $m < n$. Bona part de la teoria de control clàssica elemental s'ocupa d'estudiar la resposta dinàmica del sistema a diverses entrades en funció de la posició en el pla complex dels zeros i pols de $H(s)$. Anem a veure que podem escriure un sistema lineal de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{12}$$

on $y \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$, de manera que la funció de transferència entre u i y sigui $H(s)$.

Suposant condicions inicials nul.les, $H(s)$ és la funció de transferència entre variables v i z relaciones per la següent equació diferencial d'ordre n:

$$\begin{aligned} &a_n z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{z} + a_0 z \\ &\qquad = b_m v^{(m)} + b_{m-1} v^{(m-1)} + \cdots + b_1 \dot{v} + b_0 v. \end{aligned} \tag{13}$$

Definim ara les n variables d'estat

$$x_1 = z, \quad x_2 = \dot{z}, \quad \ldots, x_{n-1} = z^{(n-2)}, \quad x_n = z^{(n-1)}, \tag{14}$$

de manera que (13) és equivalent a

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -\frac{a_0}{a_n} x_1 - \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n + \frac{b_m}{a_n} v^{(m)} + \cdots + \frac{b_1}{a_n} \dot{v} + \frac{b_0}{a_n} v. \end{aligned} \tag{15}$$

Això és un sistema de n equacions de primer ordre, però encara no té la forma (12) donat que hi apareixen derivades del control. Per arreglar-ho definim un nou control

$$u = \frac{b_m}{a_n} v^{(m)} + \cdots + \frac{b_1}{a_n} \dot{v} + \frac{b_0}{a_n} v, \tag{16}$$

i (15) queda de la forma

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \equiv Ax + Bu \qquad (17)$$

Definint ara la sortida

$$\begin{aligned} y &= \frac{b_0}{a_n} x_1 + \frac{b_1}{a_n} x_2 + \cdots + \frac{b_m}{a_n} x_{m+1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{b_0}{a_n} & \frac{b_1}{a_n} & \cdots & \frac{b_m}{a_n} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \equiv Cx, \qquad (18) \end{aligned}$$

tindrem que la funció de transferència entre u i y és precisament $H(s)$. En efecte, treballant amb transformades de Laplace i condicions inicials nul.les, (17) i (18) esdevenen

$$\begin{aligned} sX &= AX + BU \\ Y &= CX, \end{aligned}$$

d'on

$$X = (s\mathbb{I} - A)^{-1} BU$$

i

$$Y = C(s\mathbb{I} - A)^{-1} BU.$$

Es tracta per tant de demostrar que

$$H(s) = C(s\mathbb{I} - A)^{-1} B. \qquad (19)$$

Donada la forma de B, sols cal calcular la darrera columna de la inversa de $s\mathbb{I} - A$. És fàcil veure (Apèndix B) que el determinant de $s\mathbb{I} - A$ val

$$|s\mathbb{I} - A| = s^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} s^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} s + \frac{a_0}{a_n} = \frac{1}{a_n} Q(s). \qquad (20)$$

Es demostra també a l'Apendix B que els adjunts dels elements de la darrera fila de $s\mathbb{I}-A$ són

$$1,\ s,\ \dots,\ s^{n-2},\ s^{n-1}.$$

Posant-ho tot junt tenim

$$C(s\mathbb{I}-A)^{-1}B =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{b_0}{a_n} & \frac{b_1}{a_n} & \cdots & \frac{b_m}{a_n} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \frac{a_n}{Q(s)} \cdot \begin{pmatrix} \star & \star & \dots & \star & 1 \\ \star & \star & \dots & \star & s \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \star & \star & \dots & \star & s^{n-2} \\ \star & \star & \dots & \star & s^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{Q(s)} \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-2} \\ s^{n-1} \end{pmatrix} = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m}{Q(s)},$$

tal com voliem.

Un sistema de control amb matrius de la forma donada a (17)(18)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} \frac{b_0}{a_n} \\ \frac{b_1}{a_n} \\ \dots \\ \frac{b_m}{a_n} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}^T \tag{21}$$

es diu que proporciona una realització de $H(s)$ en forma **controladora**. Una altra possibilitat és la realització en forma **observadora**, amb

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{a_{n-1}}{a_n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{n-2}}{a_n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{a_1}{a_n} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{b_m}{a_n} \\ \vdots \\ \frac{b_0}{a_n} \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}^T \tag{22}$$

Sempre és possible, mitjançant una transformació de similitud, convertir una matriu $n \times n$ qualsevol associada a un sistema dinàmic a l'espai d'estats en una de les formes controladora o observadora.

Exercici 1.1 *Trobeu la realització observadora a l'espai d'estats.*

Exercici 1.2 *Demostreu que la transformació lineal de realimentació donada per $M = \mathbb{I}$, $S = 1$ i*

$$R = \begin{pmatrix} -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}$$

converteix la forma controladora en la forma canònica de Brunovsky (10).

Exemple 1.4 *Sigui la funció de transferència*

$$H(s) = \frac{7s^2 + s - 1}{s^4 + 5s^2 + 2}$$

entre una entrada v i una sortida z. La realització en forma controladora s'obté definint les variables d'estat $x_1 = z$, $x_2 = \dot{z}$, $x_3 = \ddot{z}$, $x_4 = \dddot{z}$, l'entrada $u = 7\ddot{v} + \dot{v} - v$ i la sortida $y = -x_1 + x_2 + 7x_3$. Cal notar que les condicions sobre la sortida original z es poden transformar en condicions sobre la nova sortida y mitjançant $y = -z + \dot{z} + 7\ddot{z}$, mentre que una vegada trobat u, el control original v s'ha d'obtenir resolent l'equació diferencial $7\ddot{v} + \dot{v} - v = u$.

Exemple 1.5 *Sigui el circuit de la Figura 1, on la variable de control és el voltatge entre els punts a i b i la sortida és el voltatge a la bobina L_2. Treballant amb transformades de Laplace, les equacions per als diferents elements del circuit són, escollint $V_a = 0$,*

$$\begin{aligned} V_b - V_c &= \frac{1}{C_1 s} I_1 \\ V_c - V_d &= R_1 I_2 \\ V_d - V_e &= R_2 I_3 \\ V_c &= L_1 s (I_1 - I_2) \\ V_d &= \frac{1}{C_2 s}(I_2 - I_3) \\ V_e &= L_2 s I_3. \end{aligned}$$

Tenim 6 equacions amb 7 incògnites I_1, I_2, I_3, $V_b = E_i$, V_c, V_d i $V_e = E_o$, que podem resoldre en termes de la variable de control V_b. De fet, sols ens interessa V_e, i el resultat és

$$E_o(s) = \frac{L_1 L_2 C_1 s^3}{Q(s)} E_i(s) \equiv \frac{b_3 s^3}{Q(s)} E_i(s),$$

on

$$\begin{aligned} Q(s) &= L_1 L_2 C_1 C_2 R_1 s^4 + (L_1 C_1 C_2 R_1 R_2 + L_1 L_2 (C_1 + C_2)) s^3 \\ &+ (L_1 C_1 (R_1 + R_2) + C_2 (L_1 R_2 + R_1 L_2)) s^2 \\ &+ (L_1 + L_2 + R_1 R_2 C_2) s + R_1 + R_2 \\ &\equiv a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0. \end{aligned}$$

La realització en forma controladora a l'espai d'estats és de dimensió 4, amb $x_1 = e_o$, $x_2 = \dot{e}_o$, $x_3 = \ddot{e}_o$, $x_4 = \dddot{e}_o$, el control

$$u = b_3 \dddot{e}_i = L_1 L_2 C_1 \dddot{e}_i,$$

i la sortida

$$y = \frac{b_3}{a_4} \dddot{e}_o = \frac{1}{R_1 C_2} \dddot{e}_o.$$

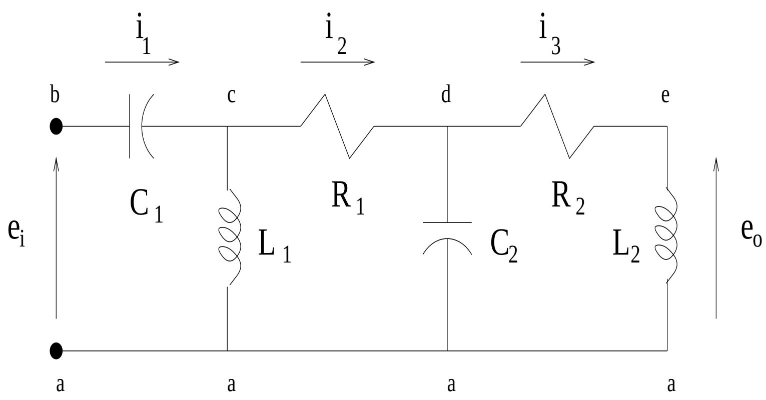

Figura 1: Circuit d'ordre 4

Exemple 1.6 *La Figura 2 mostra l'esquema d'un motor de corrent continu. Un motor d'aquest tipus pot utilitzar-se per orientar una antena o el braç d'un robot. La variable d'interés és per tant l'angle θ, i el control és generalment el voltatge d'armadura, e_a. La força contraelectromotriu és proporcional al flux ϕ del camp magnètic i a la velocitat angular de gir del motor:*

$$e_m(t) = K\phi \frac{d\theta}{dt},$$

que, suposant el flux ϕ constant, és

$$e_m(t) = K_m \frac{d\theta}{dt} \tag{23}$$

El parell del motor és proporcional al producte de ϕ i el corrent d'armadura $i_a(t)$:

$$\tau(t) = K_1 \phi i_a(t) = K_\tau i_a(t). \tag{24}$$

Finalment, l'equació mecànica del motor és

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau - B\frac{d\theta}{dt}, \tag{25}$$

on J és el moment d'inèrcia del rótor i tot el que hi penja, i B és un coeficient de fregament.

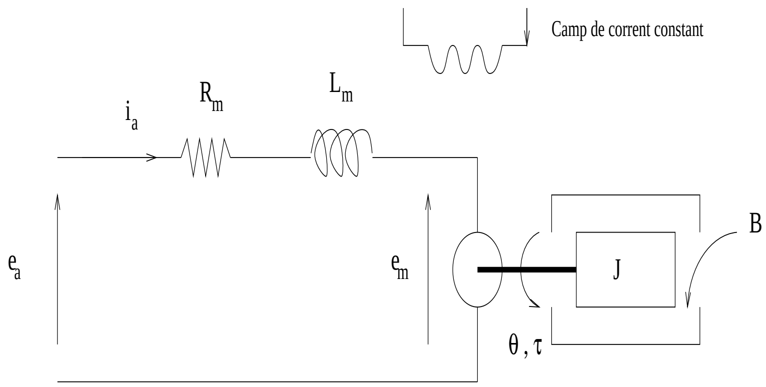

Figura 2: Esquema d'un motor de corrent continu

La relació entre les transformades de Laplace de les variables elèctriques e_a, i_a i e_m és

$$E_a(s) = E_m(s) + (R_m + sL_m)I_a(s).$$

Si eliminem $\tau(t)$ emprant (24) i transformem (23) i (25) resulta un total de tres equacions amb quatre variables E_a, E_m, I_a i Θ:

$$\begin{aligned}(Js^2 + Bs)\Theta - K_\tau I_a &= 0\\ K_m s\Theta - E_m &= 0\\ E_m + (R_m + sL_m)I_a &= E_a\end{aligned}$$

La funció de transferència de e_a a θ és llavors

$$\Theta(s) = \frac{K_\tau}{JL_m s^3 + (JR_m + BL_m)s^2 + (BR_m + K_\tau K_m)s} E_a(s).$$

Exercici 1.3 *Trobeu les realitzacions controladora i observadora del motor de corrent continu, identificant en cada cas les variables d'estat, entrada i sortida.*

2 Característiques d'un Sistema de Control

Ens apartarem momentàniament de la descripció a l'espai d'estats i, emprant la terminologia clàssica de les funcions de transferència, definirem algunes característiques d'un sistema de control. Ens centrarem en el sistema de la Figura 3, la descripció en termes de funcions de transferència del qual es mostra a la Figura 4. La funció de transferència total entre $r(t)$ i $c(t)$ és

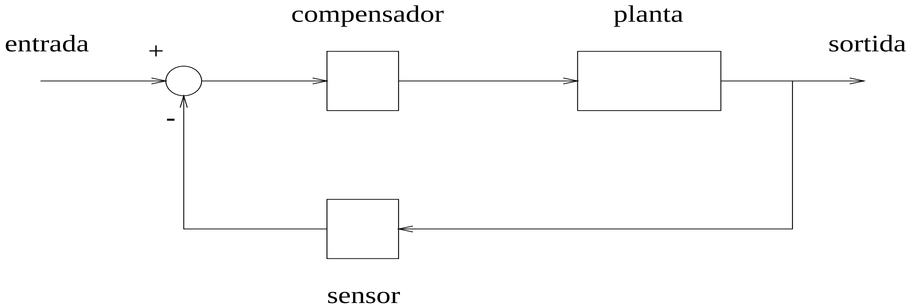

Figura 3: Sistema de control elemental

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + H(s)G_c(s)G_p(s)}. \tag{26}$$

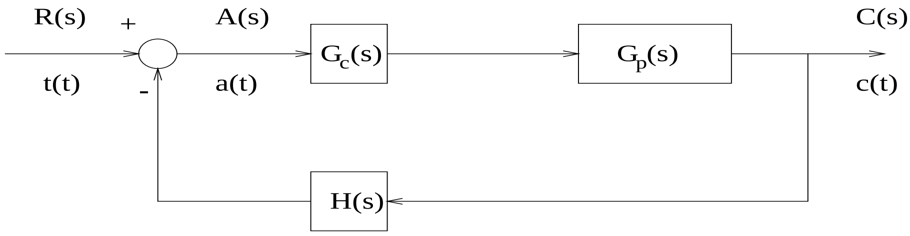

Figura 4: Funcions de transferència i senyals del sistema de la Figura 3

La variable $c(t)$ és la que volem controlar, mentre que $r(t)$ és l'entrada que nosaltres podem manipular, i que té alguna relació amb el valor dessitjat, $c_d(t)$, de $c(t)$. L'error del sistema és

$$e(t) = c_d(t) - c(t), \tag{27}$$

i $a(t)$ s'anomena el senyal actuador.

Un tipus especial de sistema és el **sistema amb realimentació unitat**, que apareix a la Figura 5. En aquest cas, les unitats de l'entrada, $r_u(t)$, són les mateixes que les de la sortida, $c_u(t)$. A més $r_u(t)$ és la sortida dessitjada, $r_u(t) = c_d(t)$, i per tant el senyal actuador és l'error del sistema. Si $H(s)$ és un guany pur, és a dir, $H(s) = k$, el model més general de la Figura 4 és pot manipular fins a donar lloc a un model amb realimentació unitat, representat a la Figura 6. En efecte, tenim

$$\begin{aligned} C(s) &= G_p(s)G_c(s)kE_u(s) \\ E_u(s) &= \frac{1}{k}R(s) - C(s), \end{aligned}$$

d'on

$$C(s) = \frac{G_p(s)G_c(s)}{1 + kG_p(s)G_c(s)}R(s)$$

que coincideix amb el cas general si $H(s) = k$. En aquest cas, el factor $1/k$ actua com un conversor de les unitats de $r(t)$ a les de $c(t)$. Anem tot seguit a discutir algunes característiques d'aquests sistemes.

2.1 Estabilitat

Tal com ja hem dit, un sistema és BIBO si qualsevol entrada fitada produeix una sortida fitada. Anem a veure qué implica això en termes de la funció de transferència (26):

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}, \tag{28}$$

on hem posat

$$G(s) = G_c(s)G_p(s). \tag{29}$$

Com que les funcions de transferència les suposem racionals, escriurem

$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)}, \quad H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)}, \tag{30}$$

amb N_G, D_G, N_H i D_H polinomis en s. Llavors

$$T(s) = \frac{N_G(s)D_H(s)}{D_G(s)D_H(s) + N_G(s)N_H(s)} \equiv \frac{P(s)}{Q(s)}. \tag{31}$$

El denominador de $T(s)$ s'anomena el **polinomi característic del sistema realimentat**:

$$Q(s) = D_G(s)D_H(s) + N_G(s)N_H(s), \tag{32}$$

i si s'iguala a zero s'obté l'**equació característica del sistema realimentat**:

$$D_G(s)D_H(s) + N_G(s)N_H(s) = 0, \tag{33}$$

que moltes vegades s'escriu com

$$1 + \frac{N_G(s)N_H(s)}{D_G(s)D_H(s)} = 0.$$

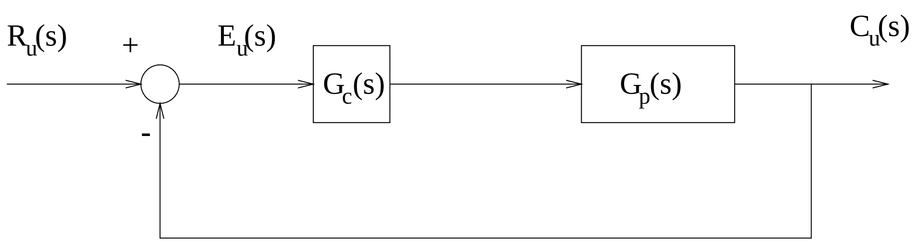

Figura 5: Sistema amb realimentació unitat

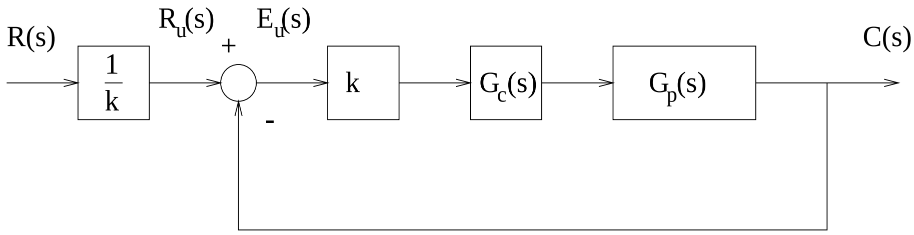

Figura 6: Sistema equivalent a $H(s) = k$

En general podrem representar $Q(s)$, que suposarem de grau n, en forma totalment factoritzada a $\mathbb{C}$:

$$Q(s) = a_n \prod_{i=1}^{\alpha} (s - p_i)^{m_i},$$

a on p_i és un dels α zeros complexos de $Q(s)$ amb multiplicitat m_i. Tenim llavors

$$C(s) = T(s)R(s) = \frac{P(s)}{a_n \prod_{i=1}^{\alpha}(s - p_i)^{m_i}} R(s).$$

Suposarem de moment que $R(s)$, la transformada de Laplace de l'entrada, no té cap pol que sigui un dels p_i. Llavors la descomposició de $C(s)$ en fraccions simples és

$$\begin{aligned} C(s) &= \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j_i=1}^{m_i} \frac{k_{ij_i}}{(s-p_i)^{j_i}} + C_r(s) \\ &= \frac{k_{11}}{s-p_1} + \frac{k_{12}}{(s-p_1)^2} + \cdots + \frac{k_{1m_1}}{(s-p_1)^{m_1}} \\ &+ \frac{k_{21}}{s-p_2} + \frac{k_{22}}{(s-p_2)^2} + \cdots + \frac{k_{2m_2}}{(s-p_2)^{m_2}} \\ &\vdots \\ &+ \frac{k_{\alpha 1}}{s-p_\alpha} + \frac{k_{\alpha 2}}{(s-p_\alpha)^2} + \cdots + \frac{k_{\alpha m_\alpha}}{(s-p_\alpha)^{m_\alpha}} + C_r(s), \end{aligned}$$

on $C_r(s)$ és la part de la descomposició en fraccions simples que prové dels pols de $R(s)$. Com que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{k}{(s-p)^m}\right) = \frac{k}{(m-1)!} t^{(m-1)} e^{pt}$$

resulta

$$c(t) = \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j_i=1}^{m_i} \frac{k_{ij_i}}{(j_i-1)!} t^{(j_i-1)} e^{p_i t} + c_r(t) \equiv c_n(t) + c_r(t),$$

amb $c_r(t) = \mathcal{L}^{-1}(C_r(s))$. Diem que $c_n(t)$ és la resposta natural del sistema, ja que prové dels pols de la funció de transferència i la seva forma funcional (les potències de t multiplicades per les exponencials amb constants p_i) no depenen de l'entrada $r(t)$ (els coeficients k_{ij_i} de la descomposició sí que depenen però, en general, de $r(t)$). Si $r(t)$ està fitada, llavors $c_r(t)$ estarà també fitada, ja que, en absència de resonància, *i.e.*, cap pol de $R(s)$ coincideix amb un pol de $T(s)$, la forma funcional de $c_r(t)$ és la mateixa que la de $r(t)$. Per tant $c(t)$ romandrà fitada si $c_n(t)$ ho fà, i això passa si tots els p_i tenen part real no positiva si la multiplicitat és 1, i part real estrictament negativa si la multiplicitat és més gran que 1.

Un sistema que té un pol d'ordre 1 amb part real igual a zero s'anomena **marginalment estable**, ja que si no hi ha resonància la sortida es mantindrà fitada, però si hi ha resonància amb aquest pol la sortida no serà fitada encara que l'entrada ho sigui. Per tant **podem assegurar que un sistema serà BIBO si tots els pols de la seva funció de transferència tenen part real estrictament negativa**. La resonància amb un pol amb part real estrictament negativa no canvia aquest resultat, encara que la descomposició anterior queda alterada.

Exemple 2.1 *Sigui un sistema de control amb $H(s) = 1$, $G_c(s) = 1/s$ (un integrador pur) i $G_p(s) = (s+1)/(s-1)$. Tenim llavors*

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{s-1}{s^2-s}$$

i $N_H(s) = D_H(s) = 1$, $N_G(s) = s+1$ i $D_G(s) = s^2 - s$. L'equació característica és

$$(s^2-s)\cdot 1 + (s+1)\cdot 1 = s^2+1 = 0,$$

i els pols de la funció de transferència

$$T(s) = \frac{\frac{s+1}{s^2-s}}{1+\frac{s+1}{s^2-s}\cdot 1} = \frac{s+1}{s^2+1}$$

són $p = \pm i$. *El sistema és per tant marginalment estable i qualsevol entrada periòdica que tingui* $\omega = 1$ *produirà una sortida no fitada. Per exemple ,si* $r(t) = \sin 2t$, *tindrem* $R(s) = 2/(s^2+4)$ *i*

$$C(s) = \frac{s+1}{s^2+1}\frac{2}{s^2+4} = \frac{2(s+1)}{(s^2+1)(s^2+4)},$$

d'on

$$c(t) = \frac{2}{3}\cos t + \frac{2}{3}\sin t - \frac{2}{3}\cos 2t - \frac{1}{3}\sin 2t = c_n(t) - \frac{2}{3}\cos 2t - \frac{1}{3}\sin 2t,$$

que és fitada en t. *En canvi, si* $r(t) = \cos t$, *tenim* $R(s) = s/(s^2+1)$ *i*

$$C(s) = \frac{s+1}{s^2+1}\frac{s}{s^2+1} = \frac{s^2+s}{(s^2+1)^2},$$

que produeix la sortida no fitada

$$c(t) = \frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{2}t\sin t + \frac{1}{2}\sin t.$$

En aquest cas, com sempre que hi ha resonància, no és possible separar la resposta natural $c_n(t)$ *de la forçada* $c_r(t)$. *Cal notar que la planta original era inestable,* $G_p(s) = (s+1)/(s-1)$, *amb un pol a* $s = 1$, *i la realimentació introduida la ha convertit al menys en marginalment estable.*

2.2 Sensitivitat

Introduirem aquí un concepte que és una de les raons fonamentals per utilitzar el control per realimentació. Es tracta de la sensitivitat d'un sistema, és a dir, de com les característiques d'un sistema canvien quan se n'altera algun paràmetre.

Definim la funció de sensitivitat de $T(s)$ respecte a un paràmetre b com

$$S_b^T(s) = \lim_{\Delta b \to 0} \frac{\Delta T(s)/T(s)}{\Delta b} b = \frac{b}{T(s)} \lim_{\Delta b \to 0} \frac{\Delta T(s)}{\Delta b} = \frac{b}{T(s)}\frac{\partial T(s)}{\partial b}, \qquad (34)$$

que és una funció, sense dimensions, de la variable s. En general, $T(s)$ serà poc sensible al paràmetre b per a valors de $s = i\omega$ en un cert rang si $|S_b^T(s)| \sim 0$ en aquest mateix rang.

Aquesta definició es pot extendre al cas en que ens preocupi la sensitivitat de

$$T(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + H(s)G_c(s)G_p(s)}$$

respecte a una de les funcions de transferència que apareixen en el sistema. Tenim així

$$S_{G_p}^T(s) = \frac{G_p(s)}{T(s)}\frac{\partial T(s)}{\partial G_p(s)} = \frac{1}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)} \tag{35}$$

i també

$$S_H^T(s) = \frac{H(s)}{T(s)}\frac{\partial T(s)}{\partial H(s)} = -\frac{G_c(s)G_p(s)H(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)}. \tag{36}$$

El producte

$$G_c(s)G_p(s)H(s)$$

s'anomena el **guany de llaç** a la freqüència ω donada per $s = i\omega$. Observant (35) i (36) es veu que si el guany de llaç és gran a una determinada freqüència, llavors $S_{G_p}^T$ és petit mentre que S_H^T és gran (s'acosta a -1). Per tant, un guany de llaç gran redueix la sensitivitat respecte a les variacions de la funció de transferència de la planta, i la aumenta respecta a les del sensor. Com que generalment el sensor el podem construir nosaltres emprant components de gran qualitat, és a dir, podem conèixer $H(s)$ amb gran precissió, mentre que és a la planta on tenim moltes incerteses amb les que no podem fer gran cosa, interessarà en general tenir un guany de llaç gran per a les freqüències d'interés. Això, però, pot representar problemes amb altres aspectes del disseny del sistema.

2.3 Rebuig de pertorbacions

Fins ara hem considerat que l'única entrada al nostre sistema de control, $r(t)$, és quelcom que nosaltres podem manipular com volguem. En realitat, normalment ens trobarem que a la planta del nostre sistema hi entren senyals sobre els que no tenim cap mena de control. Per exemple, en un sistema que intenti controlar l'orientació d'una antena de radar, la força i orientació del vent és quelcom que, com a molt, podem mesurar, però no canviar. Una descripció més realista d'un sistema de control realimentat ve donada a la Figura 7, on

$$d(t) = \mathcal{L}^{-1}(D(s))$$

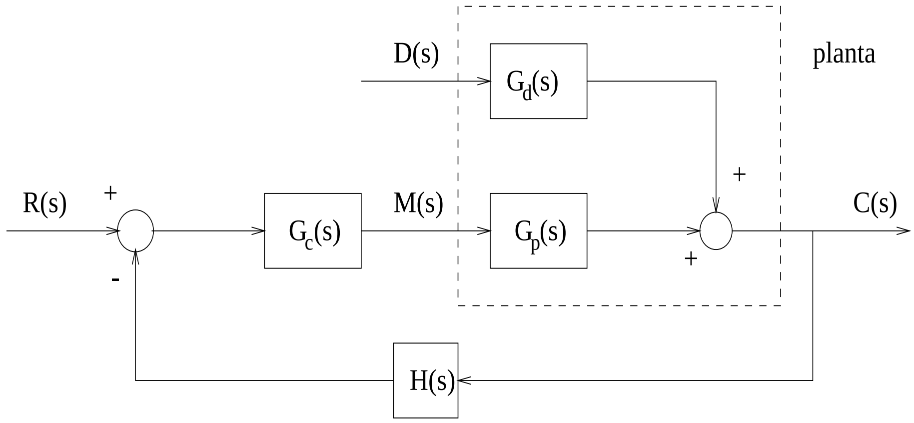

Figura 7: Un sistema de control amb pertorbacions $d(t)$

és la pertorbació que no podem controlar.

Un càlcul immediat mostra que per a aquest sistema $c(t)$ depén tant de $r(t)$ com de $d(t)$, mitjançant la relació

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{G_c(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)H(s)}R(s) + \frac{G_d(s)}{1+G_c(s)G_p(s)H(s)}D(s) && (37) \\ &\equiv T(s)R(s) + T_d(s)D(s). && (38) \end{aligned}$$

Es tracta en general d'aconseguir que $T_d(s)$ sigui petit (sense que ho sigui simultàniament $T(s)$, ja que això no milloraria el control que tenim sobre $c(t)$) per al rang de freqüències rellevant. Inspeccionant la forma de $T(s)$ i $T_d(s)$, es veu que una manera d'aconseguir això és fer $G_c(s)$ gran.

Un mètode alternatiu, sempre que poguem mesurar la pertorbació $d(t)$, és el que s'anomena **alimentació endavant** (feedforward). Es suposa que podem obtenir $D(s) = \mathcal{L}(d(t))$ i que, a més d'introduir-se a la planta, ho passem per un filtre $G_{cd}(s)$ i ho injectem en el nus de realimentació, tal com mostra la Figura 8.

Això no altera $T(s)$, però en canvi $T_d(s)$ passa a ser

$$T_d(s) = \frac{G_d(s) - G_{cd}(s)G_c(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)H(s)}.$$

Si ara escollim el filtre $G_{cd}(s)$ de manera que

$$G_{cd}(s) = \frac{G_d(s)}{G_c(s)G_p(s)}$$

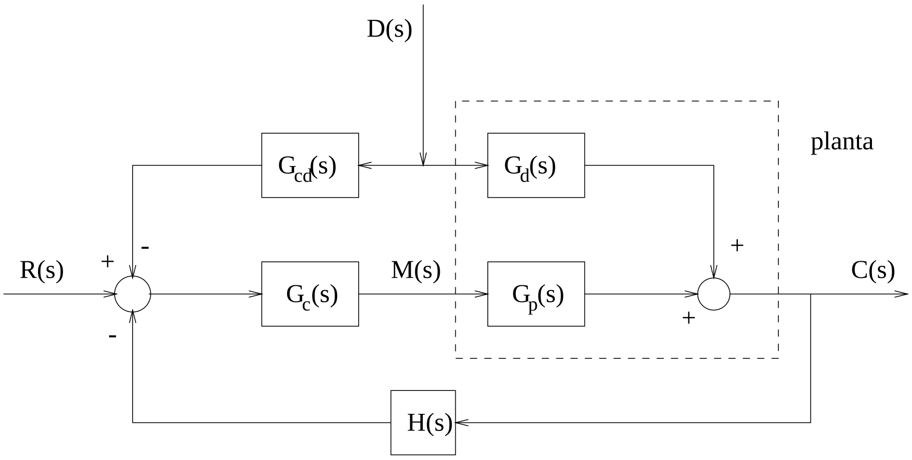

Figura 8: Un sistema amb feedforward

llavors tindrem $T_d(s) = 0$ i haurem eliminat completament l'efecte de la pertorbació. Poder fer això requereix, però, un coneixement prou exacte de $G_d(s)$ i $G_p(s)$.

2.4 Error en l'estat estacionari

En moltes aplicacions interessa que $c_d(t)$, la sortida dessitjada, segueixi un senyal senzill, com ara un esglaó o una rampa. Per exemple, en un sistema de control de la temperatura, voldrem que aquesta passi de T_a a T_b quan l'usuari així ho decideixi. Ja podem imaginar que la resposta no serà immediata, però si que esperem que, passat un cert temps, la temperatura s'estabilitzi a T_b i no, per exemple, a $0.9 \cdot T_b$. Anem a veure aquí com les característiques del sistema de control afecten a aquest error en estat estacionari.

Suposarem que el sistema és estable i que tenim realimentació unitat. Per tant

$$C(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} R(s). \tag{39}$$

Expressarem $G_c(s)G_p(s)$ com

$$G_c(s)G_p(s) = \frac{1}{s^N} \frac{F(s)}{Q_1(s)}, \tag{40}$$

on ni $F(s)$ ni $Q_1(s)$ tenen cap zero a $s = 0$, de manera que l'enter $N \in \mathbb{Z}$, que s'anomena el **tipus del sistema**, és el nombre net d'integradors del guany de llaç $G_c(s)G_p(s)$. Com que estem amb realimentació unitat, serà

$$e(t) = r(t) - c(t)$$

i, en termes de transformades,

$$E(s) = R(s) - C(s) = \left(1 - \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}\right) R(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G_p(s)} R(s).$$

Definim l'**error en estat estacionari** com

$$e_{ss} = \lim_{t\to+\infty} e(t). \tag{41}$$

Pel teorema del valor final de la transformada de Laplace, serà

$$\lim_{t\to+\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s).$$

Per tant

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} e(t). \tag{42}$$

Calcularem ara e_{ss} per a diverses funcions d'entrada.

- **Resposta a un esglaò**. Si $r(t) = A\theta(t)$ tenim $R(s) = A/s$ i llavors

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{A}{1 + G_c(s)G_p(s)} = \frac{A}{1 + K_p},$$

  on

$$K_p = \lim_{s\to 0} G_c(s)G_p(s) = \lim_{s\to 0} \frac{F(s)}{s^N Q_1(s)}.$$

  Si $N \geq 1$, tindrem $K_p = \infty$ i llavors $e_{ss} = 0$. Per tant, per a un sistema de tipus més gran o igual que 1, l'error de la resposta a un esglaò, que s'anomena error de posició, és asimptòticament zero. El tipus més gran o igual que 1 s'aconsegueix generalment posant un integrador a $G_c(s)$, sempre i quan no es compensi amb un zero de la planta.

- **Resposta a una rampa**. Si $r(t) = At\theta(t)$, tindrem $R(s) = A/s^2$ i es veu immediatament que

$$e_{ss} = \frac{A}{K_v},$$

on

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG_c(s)G_p(s) = \lim_{s \to 0} \frac{F(s)}{s^{N-1}Q_1(s)}.$$

Per tant, si $N \geq 2$ serà $K_v = \infty$ i l'error, que ara s'anomena error de velocitat, serà asimptòticament nul.

- **Resposta a una paràbola**. Si $r(t) = \frac{1}{2}At^2\theta(t)$, es demostra que

$$e_{ss} = \frac{A}{K_a}, \quad K_a = \lim_{s \to 0} \frac{F(s)}{s^{N-2}Q_1(s)},$$

i s'apliquen els mateixos comentaris.

En general, podem expandir una $r(t)$ qualsevol en sèrie de Taylor

$$r(t) = r(0) + \left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} t + \frac{1}{2} \left.\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0} t^2 + \cdots$$

Si anem aumentant el tipus N del sistema, per exemple introduint més i més integradors a $G_c(s)$, aconseguirem que els errors en estat estacionari del diversos termes de $r(t)$ siguin zero i per tant que $c(t) \sim r(t)$ per a t prou gran. El problema d'aquest mètode és que molt difícil estabilitzar sistemes de tipus 2 o més alt, i a més la resposta transitòria d'aquests sistemes és molt pobre.

Exercici 2.1 *Estudieu les expressions per als errors en estat estacionari si $H(s) \neq 1$, suposant que $H(s)$ no té cap zero ni pol a $s = 0$.*

Exercici 2.2 *Estudieu com queda afectat l'error en estat estacionari en presència de pertorbacions, segons el model de pertorbació que hem estudiat.*

2.5 Resposta transitòria

Per acabar el nostre estudi de les característiques d'un sistema de control, considerarem la resposta transitòria del sistema.

Si el sistema és estable, la resposta natural és transitòria i ve donada per

$$c_t(t) = \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j_i=1}^{m_i} \frac{k_{ij_i}}{(j_i - 1)!} t^{(j_i-1)} e^{p_i t}.$$

En general els coeficients k_{ij_i}, que determinaran, juntament amb els valors de p_i, la forma de $C_t(t)$, depenen de la localització de tots els pols i zeros, i també de la funció d'entrada, de manera que és difícil fer afirmacions genèriques sobre la duració i característiques de la resposta transitòria. Podem, però, fer alguns comentaris sobre les característiques d'alguns dels termes que poden aparèixer a $c_t(t)$.

- Per a cada pol real $p_i < 0$ podem definir una constant de temps

  $$\tau_i = -\frac{1}{p_i} = \frac{1}{|p_i|}$$

  que indica el temps que ha de passar per a que el terme associat caigui a $1/e$ del seu valor inicial (suposant que no hi hagi multiplicitat).

- Per a cada parella de pols complexos conjugats

  $$p_i = -\xi\omega_{ni} \pm j\omega_{ni}\sqrt{1-\xi_i^2},$$

  es defineixen una constant d'esmorteïment ξ_i, una freqüència d'oscil.la ció natural ω_{ni} i una constant de temps

  $$\tau_i = \frac{1}{\xi_i\omega_{ni}},$$

  amb la mateixa interpretació que en el cas del pol real. Altres característiques, com el *percent overshoot* o el *settling time*, es poden relacionar amb ξ_i i ω_{ni}.

Si un pol real p_i de la funció de transferència domina, és a dir, si $|p_i| \gg |p_j|$, $j \neq i$, llavors el sistema respon essencialment com un sistema de primer ordre i la resposta transitòria és la corresponent. Si el que domina és una parella de pols complexos conjugats, és a dir, si $|\xi_i\omega_{ni}| \gg |p_j|$, $|\xi_j\omega_{nj}|$, $j \neq i$, llavors el sistema es comporta essencialment com un sistema d'ordre 2 amb les conseqüents característiques de la resposta transitòria. Poc es pot dir en general per a sistemes d'ordre superior si no hi ha pols dominants.

3 Col.locació de Pols

Començarem amb un exemple per motivar el que farem en aquesta Secció.

Exemple 3.1 *Sigui un sistema en forma controladora amb tres sortides*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \equiv Ax + Bu, \quad y = \mathbb{I}x = x,$$

és a dir, suposem que podem de fet mesurar tots els estats del sistema. Això dóna lloc a tres funcions de transferència de u a cada una de les sortides x_1*,* x_2 *i* x_3*, de la forma*

$$T_i(s) = \frac{P_i(s)}{|s\mathbb{I} - A|} = \frac{P_i(s)}{s^3 - 2s^2 + 2s - 1}, \quad i = 1, 2, 3$$

Com que $\dot{x}_1 = x_2$ *i* $\dot{x}_2 = x_3$*, serà* $P_2(s) = sP_1(s)$*,* $P_3(s) = s^2 P_1(s)$*, i sols cal calcular* $P_1(s)$*, que és fàcil veure que val* 1 *(es pot pensar que la funció de transferència de u a* x_1 *és la que correspon a una sortida* $y = x_1 = (1\ 0\ 0)^T x$*, i per tant, en la notació de la forma controladora, a* $b_0 = 1$*). En qualsevol cas, les funcions de transferència tenen pols a* $s = 1$ *i* $s = 1/2 \pm j\sqrt{3}/2$*, i per tant el sistema és altament inestable. Volem estabilitzar el sistema mitjançant una* ***realimentació d'estat****, és a dir, una transformació lineal de realimentació amb* $M = \mathbb{I}$ *i* $S = 1$*:*

$$u = -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3 + v,$$

on v és el nou control i les k_i *són constants que escollirem per tal de* ***col.locar*** *els pols del sistema realimentat allà on ens interessi. El sistema realimentat és*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 - k_1 & -2 - k_2 & 2 - k_3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v \equiv \tilde{A}x + Bv,$$

amb polinomi característic

$$\tilde{Q}(s) = \det\left(s\mathbb{I} - \tilde{A}\right) = s^3 - (2 - k_3)s^2 + (2 + k_2)s - 1 + k_1.$$

Si volem col.locar els pols a $-\lambda_1$*,* $-\lambda_2$ *i* $-\lambda_3$*, haurà de ser*

$$\begin{aligned} s^3 - (2 - k_3)s^2 + (2 + k_2)s - 1 + k_1 &= (s + \lambda_1)(s + \lambda_2)(s + \lambda_3) \\ &= s^3 + s^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + s(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) + \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \quad (43) \end{aligned}$$

d'on es dedueïx el sitema lineal per a les k_i donat per

$$\begin{aligned} k_3 - 2 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ k_2 + 2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \\ k_1 - 1 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{aligned}$$

amb solució immediata. Per exemple, si volem col.locar els pols a -20 i $-1 \pm j$, de manera que hi hagi un parell de pols complexos dominants, serà $\lambda_1 = 20$, $\lambda_2 = 1 - j$, $\lambda_3 = 1 + j$ i això ens dóna $k_1 = 41$, $k_2 = 40$ i $k_3 = 24$. El sistema realimentat és llavors

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -40 & -42 & -22 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v$$

Volem ara generalitzar el que hem fet a qualsevol sistema de la forma

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \tag{44}$$

amb $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$ i A, B no necessàriament en forma controladora. El que sí suposarem, però, és que, a més de la sortida "principal"y, podem mesurar tots els estats x_1, x_2, $\ldots$,x_n del sistema, tal com fèiem de fet a l'exemple. El nostre objectiu és dissenyar una realimentació

$$u = -Kx + v = -(k_1\ k_2\ \ldots\ k_n)x + v \tag{45}$$

de manera que el sistema realimentat tingui els pols on volem. De les equacions anteriors obtenim

$$\dot{x} = Ax + B(-Kx + v) = (A - BK)x + Bv \tag{46}$$

Esquemàticament, el que estem fent es mostra a la Figura 9.

La matriu del sistema realimentat és $\tilde{A} = A - BK$ i la seva equació característica és $|s\mathbb{I} - \tilde{A}| = |s\mathbb{I} - A + BK| = 0$. Si volem que els pols del sistema realimentat estiguin localitzats a $-\lambda_1$, $-\lambda_2$, $\ldots$,$-\lambda_n$, el polinomi característic dessitjat serà

$$Q_d(s) = (s + \lambda_1)(s + \lambda_2)\cdots(s + \lambda_n) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0, \tag{47}$$

on les α_i, $i = 0, \ldots, n-1$, s'obtenen fent sumes de productes de les λ_i, $i = 1, \ldots, n$. Volem llavors imposar que

$$|s\mathbb{I} - A + BK| = Q_d(s). \tag{48}$$

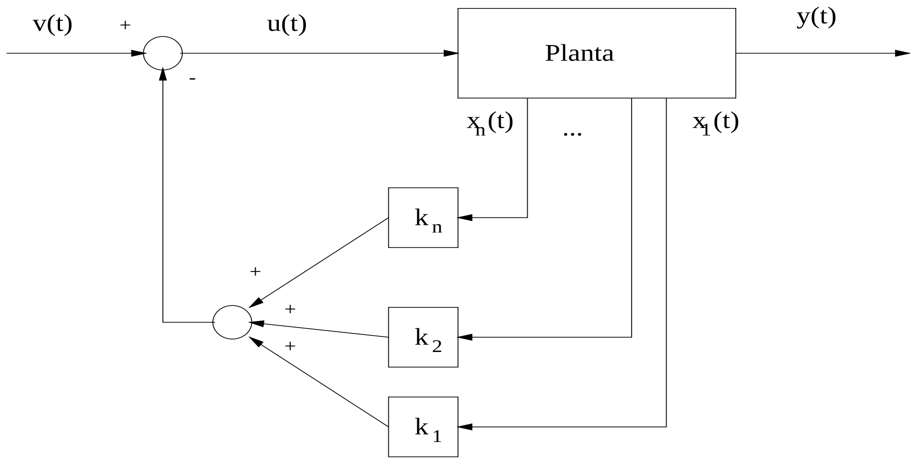

Figura 9: Realimentació d'estat d'un sistema

Exercici 3.1 *Demostreu que α_i s'obtè fent la suma de tots els productes possibles amb $n-i$ factors dels λ's. Per exemple, α_0 és l'únic producte dels n λs, mentre que α_1 és la suma dels n productes de $n-1$ λs que es poden formar.*

Solucionarem primer l'equació (48) pel cas que (A, B) estiguin en forma controladora. El càlcul en aquest cas no és més que una repetició del que hem fet en l'exemple del començament d'aquesta Secció. Tindrem que

$$BK = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_{n-1} & k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}$$

i

$$|s\mathbb{I} - A + BK| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{a_0}{a_n} + k_1 & \frac{a_1}{a_n} + k_2 & \frac{a_2}{a_n} + k_3 & \dots & s + \frac{a_{n-1}}{a_n} + k_n \end{vmatrix}$$

D'acord amb les fórmules de l'apèndix B, aquest determinant val

$$s^n + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} + k_n\right) s^{n-1} + \cdots + \left(\frac{a_1}{a_n} + k_2\right) s + \left(\frac{a_0}{a_n} + k_1\right).$$

La solució del nostre problema de realimentació és per tant

$$k_n = \alpha_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_n}, \ldots, k_2 = \alpha_1 - \frac{a_1}{a_n}, k_1 = \alpha_0 - \frac{a_0}{a_n}, \tag{49}$$

és a dir,

$$k_i = \alpha_{i-1} - \frac{a_{i-1}}{a_n}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{50}$$

Aquest resultat sols és aplicable quan el sistema està en forma controladora, que no és el cas general quan es plantejen les equacions diferencials d'un sistema físic (si tenim la funció de transferència sempre podem escriure la forma controladora, però, en general, també cal treballar per obtenir la funció de transferència a partir de les equacions diferencials).

El cas general amb A i B qualsevols es pot tractar convertint primer el sistema a la forma controladora mitjançant una transformació de similitud $x \mapsto Mx$, aplicant llavors (50) i tornat enrera amb la transformació de similitud inversa. Això es pot fer ja que les transformacions de similitud no canvien l'equació característica del sistema o, el que és el mateix, la situació dels pols. En efecte, recordant que si $x \mapsto Mx$ llavors $A \mapsto \tilde{A} = MAM^{-1}$, serà

$$\begin{aligned}&\det(s\mathbb{I} - \tilde{A}) = \det(s\mathbb{I} - MAM^{-1}) = \det(sMM^{-1}\mathbb{I} - MAM^{-1}) \\ &= \det(M(s\mathbb{I} - A)M^{-1}) = \det M \det(s\mathbb{I} - A) \det M^{-1} = \det(s\mathbb{I} - A).\end{aligned} \tag{51}$$

No entrarem en els detalls d'aquest procediment de transformació i antitransformació, però el resultat final és l'anomenada **fórmula d'Ackermann**, que dóna el guany

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-2}B & A^{n-1}B \end{bmatrix}^{-1} Q_d(A) \tag{52}$$

on hi apareix la inversa de la matriu formada pels vectors columna B, AB,…,$A^{n-1}B$, i on $Q_d(A)$ és la matriu formada a partir d'A i el polinomi característic dessitjat:

$$Q_d(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0\mathbb{I}. \tag{53}$$

Per tal que mètode funcioni és necessari per tant que la matriu

$$\left[\begin{array}{cccccc} B & AB & \cdots & A^{n-2}B & A^{n-1}B \end{array}\right]$$

tingui determinant no nul. Retrobarem aquest resultat, i la seva interpretació, quan parlem de **controlabilitat** de un sistema.

Exercici 3.2 *Calculeu la realimentació d'estat que col.loca els pols de*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

a -1, $-2-i$, $-2+i$. *Solució: La matriu del sistema té els pols a* 2, $1+\sqrt{2}$ *i* $1-\sqrt{2}$. *La realimentació que es dessitja ve donada per* $K = (60 \quad -51 \quad 33)$.

Exercici 3.3 *Vegeu en qué resulta la fórmula d'Ackermann quan* (A, B) *estan en forma controladora.*

4 Disseny d'Observadors

A la Secció anterior hem introduït el mètode amb què es poden situar els pols d'un sistema allà on es dessitgi en la formulació d'espai d'estats. El principal problema del mètode és que cal mesurar tots els estats del sistema per tal de generar el senyal de realimentació

$$u(t) = -Kx(t),$$

Si l'ordre n del sistema és més gran que 2, això pot ser molt difícil de fer a la pràctica. Per tal de solucionar aquest problema es poden utilitzar les tècniques de **disseny d'observadors**, que permeten **estimar** l'estat del sistema a partir de les mesures del senyal de sortida $y(t)$ i del senyal d'entrada $u(t)$.

Sigui per tant un sistema d'ordre n amb una entrada i una sortida, representat per

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad y = Cx \tag{54}$$

El nostre objectiu és construir un **estimador** o **observador** $\hat{x}(t)$ de l'estat $x(t)$ del sistema en un moment donat. En aquest intent emprarem tota la informació disponible: les matrius A, B i C del sistema, l'entrada $u(t)$ i la sortida $y(t)$. En cap moment podem conèixer $x(t)$ directament (excepte pel fet de que apareix a $y(t)$), i, en particular, no podem conèixer l'estat inicial $x(0)$.

La idea essencial és introduir una equació diferencial per a l'estimador i fer-ho de manera que la solució $\hat{x}(t)$ tendeixi cap a $x(t)$ en una escala de temps més curta que la de l'estat més ràpid del sistema. Tenint en compte la informació disponible, l'equació diferencial lineal més general que podem escriure per a $\hat{x}(t)$ és

$$\frac{\mathrm{d}\hat{x}}{\mathrm{d}t} = F\hat{x} + Hu + Gy, \tag{55}$$

on F, H i G són matrius a escollir. El senyal de realimentació es generarà llavors a partir de $\hat{x}(t)$ mitjançant

$$u(t) = -K\hat{x}(t). \tag{56}$$

La Figura 10 mostra l'estructura de l'estimació-realimentació.

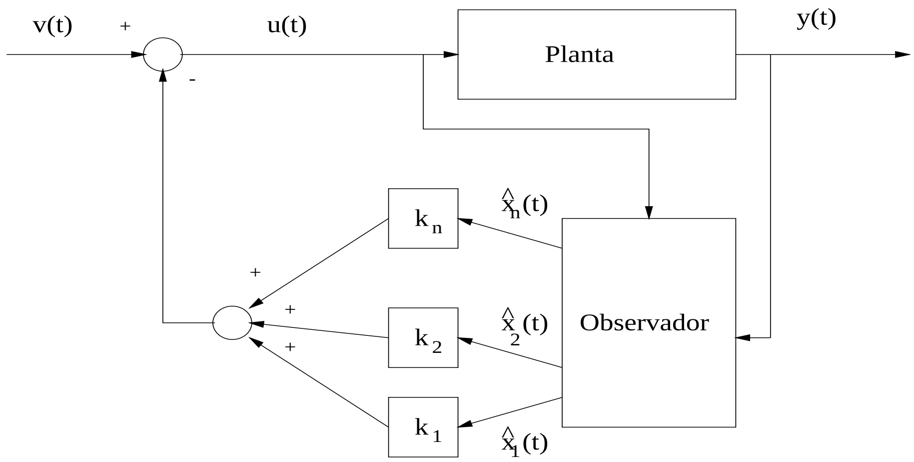

Figura 10: Realimentació d'estat amb estimació

Determinarem les matrius F, H i G demanant que la funció de transferència del senyal u a la component $\hat{x}_i$ de l'estimador sigui la mateixa que la de $u(t)$ a la component x_i de l'estat, és a dir

$$\frac{\hat{X}_i(s)}{U(s)} = \frac{X_i(s)}{U(s)}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{57}$$

De (55) tenim

$$s\hat{X}(s) = F\hat{X}(s) + HU(s) + GY(s) = F\hat{X}(s) + HU(s) + GC(s\mathbb{I} - A)^{-1}BU(s),$$

on hem emprat la funció de transferència de $U(s)$ a $Y(s)$ donada per

$$Y(s) = C(s\mathbb{I} - A)^{-1}BU(s).$$

Resulta així

$$\hat{X}(s) = (s\mathbb{I} - F)^{-1}(H + GC(s\mathbb{I} - A)^{-1}B)U(s). \tag{58}$$

La funció (vector) de transferència de $U(s)$ a $X(s)$ ve donada per

$$X(s) = (s\mathbb{I} - A)^{-1}BU(s).$$

Igualant les funcions de transferència de l'estat i el seu estimador, obtenim

$$(s\mathbb{I} - A)^{-1}B = (s\mathbb{I} - F)^{-1}(H + GC(s\mathbb{I} - A)^{-1}B).$$

Aquesta equació es pot manipular fins a obtenir

$$(s\mathbb{I} - F)^{-1}(s\mathbb{I} - F - GC)(s\mathbb{I} - A)^{-1}B = (s\mathbb{I} - F)^{-1}H,$$

que implica

$$(s\mathbb{I} - F - GC)(s\mathbb{I} - A)^{-1}B = H$$

i, finalment,

$$(s\mathbb{I} - A)^{-1}B = (s\mathbb{I} - F - GC)^{-1}H. \tag{59}$$

Una solució d'aquesta equació és escollir $H = B$ i $F + GC = A$. Per tant, una solució per a les matrius de l'equació diferencial de l'estimador és

$$F = A - GC \tag{60}$$
$$H = B \tag{61}$$

La matriu G queda totalment lliure, i la podem escollir per satisfer altres demandes. Ens ha quedat així la següent equació per l'estimador

$$\dot{\hat{x}} = (A - GC)\hat{x} + Bu + Gy. \tag{62}$$

L'error de l'estimació és un vector donat per

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t).$$

La seva evolució temporal és

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = (Ax + Bu) - ((A - GC)\hat{x} + Bu + Gy) = (A - GC)(x - \hat{x}),$$

on hem emprat $y = Cx$. Ens queda així

$$\dot{e} = (A - GC)e. \tag{63}$$

Veiem per tant que la dinàmica de l'error és la mateixa que la de l'estimador si en aquesta darrera no es consideren les "entrades"u i y. L'equació característica de l'equació diferencial de l'estimador és

$$\det(s\mathbb{I} - A + GC) = 0. \tag{64}$$

La matriu G que havia quedat lliure la podem escollir demanant que l'equació característica (64) tingui tots els seus zeros amb part real negativa, i prou gran en magnitut per què l'error tendeixi a zero molt més ràpidament que el temps típic de variació de l'estat més ràpid del sistema. Més concretament, podem "col.locar"els zeros de (64), de manera que coincideixen amb els del polinomi

$$Q_e(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0, \tag{65}$$

és a dir

$$\det(s\mathbb{I} - A + GC) = Q_e(s),$$

emprant un resultat semblant a la fórmula d'Ackermann. L'expressió que s'obté és ara

$$G = Q_e(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-2} \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{66}$$

on hi apareix la inversa de la matriu formada per les files C, CA,. . . ,CA^{n-1}. Veurem que, de nou, l'existència d'aquesta inversa té un significat propi.

Exercici 4.1 *Sigui el sistema*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad y = (1 \;\; 0)x,$$

que té un pol doble a $s = 0$. Dissenyeu primer una realimentació d'estat per col.locar els pols a $-1 \pm j$. Després, dissenyeu un estimador del sistema que tingui un errors que evolucionin amb esmorteïment crític i 10 vegades més ràpid que els modes del sistema realimentat.

Cal ara atacar una qüestió subjacent al mètode que hem presentat i que està implícita a l'exercici anterior. Hem substituït la realimentació d'estat $u = -Kx$ per la realimentació de l'estimador de l'estat, $u = -K\hat{x}$. Hom pot llavors preguntar-se si això farà que els pols que hem col.locat calculant K es "moguin"quan s'utilitza $\hat{x}$ en lloc de x. Per respondre la pregunta, considerem el sistema amb la realimentació-estimació

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu = Ax - BK\hat{x} + Bv \\ \dot{\hat{x}} &= (A - GC)\hat{x} + Bu + Gy = (A - GC)\hat{x} - BK\hat{x} + GCx \end{aligned}$$

Podem formular això com una equació d'estat a $\mathbb{R}^{2n}$ si ajuntem x i $\hat{x}$ en un sol vector. Llavors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -BK \\ GC & A - GC - BK \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} v. \tag{67}$$

Es tracta de veure si els zeros de l'equació característica d'aquest sistema **que corresponen a** x són els mateixos que els de $A - BK$, que són els que haviem col.locat mitjançant la realimentació d'estat. Això és difícil de veure a (67), ja que cada un dels blocs és una matriu i el càlcul de determinants no funciona igual. Les regles standard sí que valen però si la matriu és bloc-triangular. El que farem per tant és cercar una transformació de similitut que converteixi la matriu de (67) en bloc-triangular superior, és a dir, tal que el bloc d'abaix a l'esquerra sigui tot zeros. Sabem que una transformació de similitut no canvia els zeros de l'equació característica. A més, per tal que poguem identificar clarament quins dels zeros corresponen a x, caldrà que la transformació no ens canviï x. La similitut que "funciona"ve donada per

$$M = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ \mathbb{I} & -\mathbb{I} \end{pmatrix}$$

Això correspon a deixar x igual i substituir $\hat{x}$ per $x - \hat{x}$, és a dir, per l'error e. Un càlcul immediat mostra que

$$M\begin{pmatrix} A & -BK \\ GC & A - GC - BK \end{pmatrix}M^{-1} = \begin{pmatrix} A - BK & -BK \\ 0 & A - GC \end{pmatrix}.$$

Tal com hem dit, com que això és bloc-triangular, la seva equació característica és

$$|s\mathbb{I} - A + BK||s\mathbb{I} - A + GC| = 0.$$

Per tant tenim els zeros de $|s\mathbb{I} - A + BK| = 0$, que són els pols que hem col.locat en el procés de disseny, i els zeros de $|s\mathbb{I} - A + GC| = 0$, corresponents a l'evolució de l'error. Això és força afortunat, ja que si no el procés d'estimació destruïria el procés de col.locació per realimentació.

Acabarem aquesta Secció comentant que el disseny d'estimadors és un negoci molt arriscat si el sistema té alguna mena de pertorbació. Per exemple, si suposem que tenim "soroll" tant a l'equació del sistema com a la sortida

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + B_w w(t) \\ y &= Cx + \nu(t) \end{aligned}$$

llavors és fàcil veure que l'evolució de l'error d'estimació és

$$\dot{e} = (A - GC)e + B_w w(t) - G\nu(t)$$

i, no importa com agafem G, l'error no tendirà cap a zero per a $w(t)$ i $\nu(t)$ generals. Aquests efectes, juntament amb la possible inexactitut de les matrius A, B i C del sistema que intervenen a l'equació per a $\hat{x}$, s'han de tenir molt en compte abans de confiar el funcionament d'un sistema a les tècniques que s'han presentat en aquesta Secció.

5 Controlabilitat i observabilitat

Hem vist a les seccions anteriors que per tal de poder col.locar els pols mitjançant realimentació d'estat o fixar la dinàmica de l'error en el disseny d'estimadors cal que les matrius

$$\mathcal{K}_c = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-2}B & A^{n-1}B \end{bmatrix} \tag{68}$$

i

$$\mathcal{K}_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-2} \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{69}$$

siguin inversibles, és a dir, tinguin determinant no nul. Veurem en aquesta Secció quin és el significat intrínsec d'aquestes dues condicions. Això requereix definir els termes *controlabilitat* i *observabilitat*.

Diem que el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu(t) \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{70}$$

és **controlable** en $[0, t_f]$ si, donada una condició inicial qualsevol $x(0)$, és possible trobar un control $u(t)$ entre 0 i t_f de manera que $x(t_f) = 0$. Aquest mateix sistema es diu que és **observable** en $[0, t_f]$ si l'estat inicial $x(0)$ és determinable de forma única observant la sortida $y(t)$ entre $t = 0$ i $t = t_f$.

Tenim llavors els següents resultats, que demostrem a l'Apèndix C:

$$\boxed{\text{El sistema (70) és controlable amb } t_f \text{ qualsevol si i sols si } \det K_c \neq 0.}$$

$$\boxed{\text{El sistema (70) és observable amb } t_f \text{ qualsevol si i sols si } \det K_o \neq 0.}$$

Aquests resultats es coneixen com **condicions de Kalman** per a les matrius de controlabilitat, K_c, i d'observabilitat, K_o.

Exemple 5.1 *Sigui el sistema tridimensional*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} u(t), \qquad y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Hom obté immediatament

$$K_c = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Per tant $\det K_c = 0$ *i el sistema no és controlable. A més*

$$K_o = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

i, com que $\det K_o = 0$ *el sistema tampoc és observable. La no contrabilitat és deguda a que, sumant les equacions diferencials de les tres variables, s'obté,*

$$\frac{d}{dt}(x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

i, per tant, $x_1 + x_2 + x_3 = $ *constant. Això vol dir que no és possible portar les tres variables a zero en cap instant de temps llevat que les condicions inicials siguin tals que* $x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) = 0$. *La no observabilitat és una mica més complicada d'interpretar. Fixem-nos que*

$$y = x_1 + x_2, \quad \dot{y} = -x_3 + u, \quad \ddot{y} = -x_3 + u + \dot{u}, \quad \ldots .$$

Observant $y(t)$ *entre* 0 *i un temps qualsevol* t *podrem determinar* $y(0)$, $\dot{y}(0)$, $\ddot{y}(0)$, $\ldots$ *i, comparant amb les equacions anteriors per a* y *i les seves derivades, es veu que això ens permet determinar* $x_1(0) + x_2(0)$ *i* $x_3(0)$, *però no* $x_1(0)$, $x_2(0)$ *i* $x_3(0)$ *(es suposa que* u *i les seves derivades són conegudes).*

La funció de transferència de $u(t)$ *a* y *és*

$$T(s) = C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B = \frac{s^2 - s}{s(s-1)^2}$$

i veiem que es produeix una cancel.lació zeros-pols. Això és un altre signe de la no controlabilitat-observabilitat.

Exercici 5.1 *Demostreu que el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - u \\ y &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

és observable, i expliqueu per qué.

6 Seguiment de senyals

A les Seccions precedents hem considerat sols el problema de "regular" un sistema, és a dir, portar-lo a l'estat d'equilibri quan l'entrada és nul.la, partint de condicions inicials desconegudes. Hem vist que això ho podiem fer amb realimentació d'estat $u = -Kx + v$ o amb realimentació per observadors, $u = -K\hat{x} + v$. El que volem fer ara és escollir $v(t)$ de manera que la sortida del sistema segueixi una determinada senyal $r(t)$. Sols considerarem explícitament el cas en què poguem mesurar tot l'estat del sistema.

Sigui de nou un sistema a $\mathbb{R}^n$ amb una entrada i una sortida

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{71}$$

Volem efectuar una realimentació d'estat $u(t) = -Kx + v(t)$ de manera que la sortida y segueixi un senyal donat $r(t)$. La Figura 11 mostra l'esquema resultant quan l'entrada s'escolleix com

$$v(t) = K_r r(t),$$

on K_r és una constant que haurem de determinar. Tenim per tant

$$u(t) = -Kx + K_r r(t). \tag{72}$$

Pensant en els esquemes clàssics que haviem discutit a la Secció 2, volem escriure això en la forma

$$K_a(r(t) - y) - K_b x,$$

on K_a és un guany escalar i K_b és un vector de guanys.Això es pot fer ja que $y = Cx$, i l'esquema resultant, interpretat com un sistema "planta-compensador"amb realimentació unitat, apareix a la Figura 12. Substituint l'expressió de y i comparant amb $u(t)$ tenim

$$-Kx + K_r r(t) = K_a r(t) - K_a Cx - K_b x,$$

d'on treiem

$$\begin{aligned} K_r &= K_a \\ K &= K_a C + K_b \end{aligned}$$

Per tant, s'ha de resoldre

$$K = K_r C + K_b. \tag{73}$$

Això és un sistema de n equacions amb $n+1$ incògnites $K_r, K_{b1}, \ldots, K_{bn}$. Per tant tenim llibertat per escollir un dels guanys imposant alguna condició addicional.

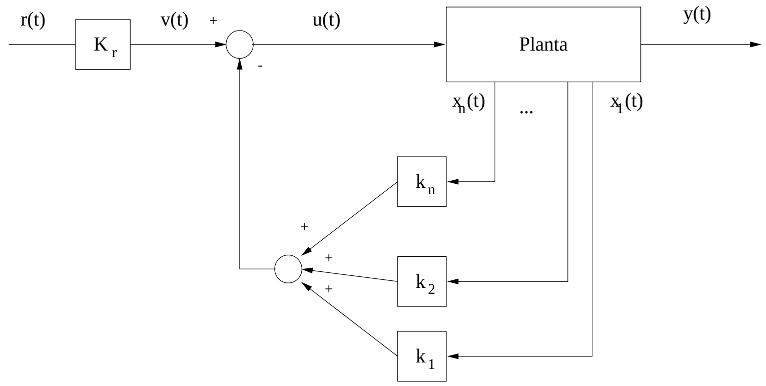

Figura 11: Seguiment de senyal

Exemple 6.1 *Sigui de nou el sistema*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x,$$

en el que suposem que hem col.locat els pols a $-4 \pm 4j$ *mitjançant la realimentació d'estat amb vector de guanys* $K = \begin{pmatrix} 32 & 8 \end{pmatrix}$. *L'equació (73) esdevé*

$$\begin{aligned} 32 &= K_r + K_{b1} \\ 8 &= K_{b2} \end{aligned}$$

Les solucions depenen d'un paràmetre arbitrari $K_{b1} = \gamma$, *en la forma*

$$K_{b2} = 8, \quad K_r = 32 - \gamma.$$

El sistema realimentat d'aquesta manera és

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\gamma x_1 - 8x_2 + (32-\gamma)(r(t) - y) \end{aligned}$$

En termes de la interpretació planta-compensador tenim les funcions de transferència

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 + 8s + \gamma}, \quad G_p(s) = 32 - \gamma.$$

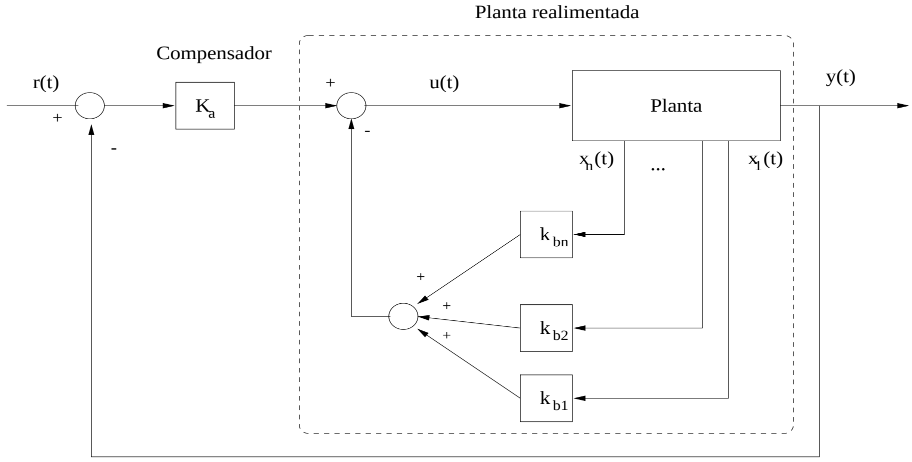

Figura 12: Seguiment de senyal des d'un altre punt de vista

Per tant

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{32-\gamma}{s^2+8s+\gamma},$$

que, en general, és de tipus 0 *i, per tant, el sistema no serà capaç de seguir un senyal constant amb error nul en estat estacionari. Si* $\gamma = 0$ *tindrem, però, que el sistema és de tipus* 1 *i no tindrem error en estat estacionari si* $r(t) =$ *constant.*

Referències

[1] Chen, Chi-Tsong, **Linear System Theory and Design**, Harcourt Brace College Publishers (1984), ISBN: 0-03-060289-0.

[2] Doyle, J.C., B.A. Francis, i A.R. Tannenbaum, **Feedback Control Theory**, Macmillan Pub. Co. (1992), ISBN: 0-02-330011-6.

[3] Marino, R., i P. Tomei, **Nonlinear Control Design**, Prentice Hall (1995), ISBN: 0-13-342635-1.

[4] Phillips, Ch. L., i Royce D. Harbor, **Feedback Control Systems**, Prentice Hall (1996), ISBN: 0-13-371691-1.

[5] Rugh, W.J., **Linear System Theory**, Prentice Hall (1996), ISBN: 0-13-441205-2.

[6] Slotine, J.-J. E., i Weiping Li, **Applied Nonlinear Control**, Prentice Hall (1991), ISBN: 0-13-040890-5.

[7] De Vegte, J. van, **Feedback Control Systems**, Prentice Hall (1994), ISBN: 0-13-191503-7.

A Solució general d'un sistema lineal

B Càlcul d'alguns determinants i adjunts

C Demostració de la condició de Kalman