

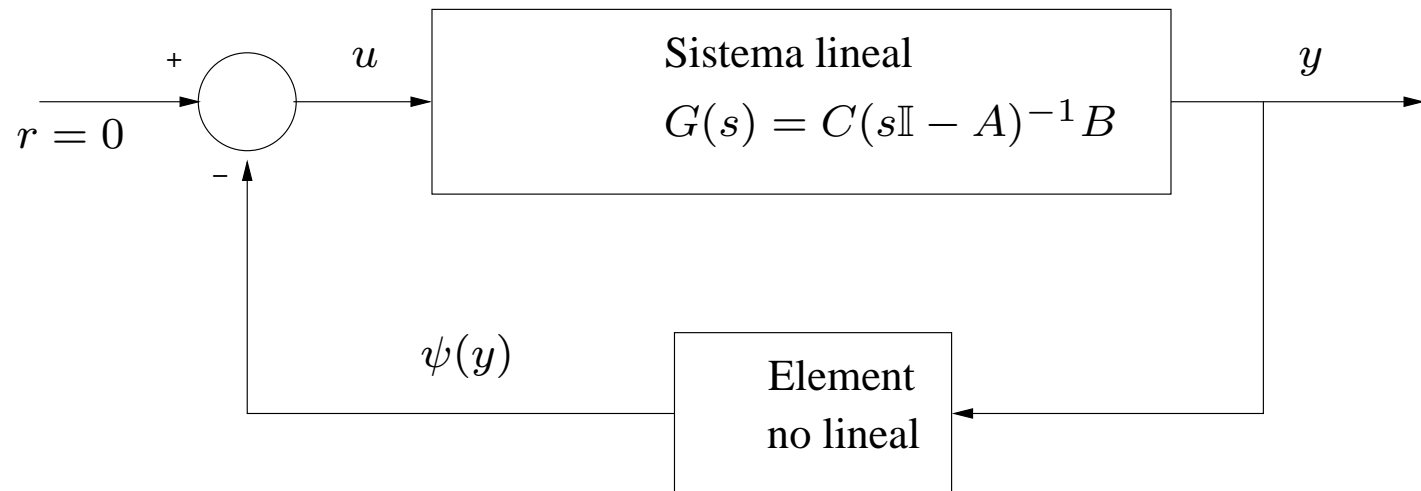
Sistemes realimentats

Segona part: funció descriptiva

Capítol 10 de Khalil, pàgines 450-468

Funció descriptiva

- Tornem al nostre sistema lineal, però ara realimentat mitjançant una no-linealitat independent del temps:



-

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$y = Cx,$$

$$u = -\psi(y).$$

- $x \in \mathbb{R}^n$, $u, y \in \mathbb{R}^p$, (A, B) controlable, (A, C) observable, ψ localment Lipschitz en y .

- Volem investigar l'existència de solucions periòdiques amb període $T = 2\pi/\omega > 0$:

$$y\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = y(t).$$

- Expressem $y(t)$ en sèrie de Fourier complexa

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \exp(jk\omega t).$$

- La satisfacció de les equacions ens portarà a determinar ω i les c_k . Aquest procediment per a trobar solucions es coneix en general com el **mètode del balanç harmònic**.
- Com que ψ és independent del temps, $\psi(y(t))$ serà també periòdica amb període T i, formalment

$$\psi(y(t)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(jk\omega t),$$

on cada coeficient c_i depèn, en principi, de tots els a_i .

- Si $y(t)$ és solució, tenim, en termes de transformades de Laplace,

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

amb

$$U(s) = -\mathcal{L}(\psi(y(t))).$$

- Escrivint la funció de transferència com

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)},$$

tindrem

$$d(s)Y(s) = n(s)U(s).$$

- Tornant al domini temporal i tenint en compte la forma de $U(s)$, això dóna

$$d(p)y(t) + n(p)\psi(y(t)) = 0$$

on $p = d/dt$.

- Emprant ara l'expressió en sèrie de Fourier de $y(t)$ i $\psi(y(t))$, i tenint en compte que

$$p \exp(jk\omega t) = jk\omega \exp(jk\omega t)$$

obtenim

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (d(jk\omega)a_k + n(jk\omega)c_k) \exp(jk\omega t) = 0$$

- Finalment, emprant l'ortogonalitat de les exponencials,

$$d(jk\omega)a_k + n(jk\omega)c_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

- Això es pot re-escriure com

$$G(jk\omega)c_k + a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

on suposem que ni ω ni els seus múltiples són freqüències naturals del sistema lineal.

- Donat que $G(jk\omega) = \bar{G}(jk\omega)$, $a_k = \bar{a}_{-k}$, $c_k = \bar{c}_{-k}$, sols cal estudiar aquestes equacions complexes per a $k \geq 0$.

- Donat que cada c_k depèn de totes les a_k , això és un sistema de dimensió infinita difícilment tractable.
- Com que $G(s)$ és estrictament pròpia, $\lim_{k \rightarrow \infty} G(jk\omega) = 0$ i, en conseqüència $a_k \rightarrow 0$ també.
- Per tant ens limitarem a resoldre una aproximació finita

$$G(jk\omega)\hat{c}_k + \hat{a}_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, q$$

per a q prou gran. El barret indica que estem resolent un problema aproximat.

- Fins i tot aquest problema aproximat és força complicat. El podem simplificar més escollint $q = 1$. Això vol dir que estem suposant $G(jk\omega) \approx 0$ per a tot $k > 1$.
- Encara que coneixem $G(s)$, l'aproximació anterior és difícil de verificar donat que no coneixem ω . Aquesta és, però, l'aproximació de la **funció descriptiva**.
- Posant $\hat{a}_k = 0$ per a tot $k > 1$ tenim una equació real i una altra de complexa:

$$\begin{aligned} G(0)\hat{c}_0(\hat{a}_0, \hat{a}_1) + \hat{a}_0 &= 0, \\ G(j\omega)\hat{c}_1(\hat{a}_0, \hat{a}_1) + \hat{a}_1 &= 0. \end{aligned}$$

- Tenim per tant tres equacions reals i quatre incògnites reals: ω , \hat{a}_0 , $\text{Re } \hat{a}_1$, $\text{Im } \hat{a}_1$.
- Aquesta indeterminació es deguda a l'arbitrarietat de l'origen temporal en un sistema autònom, que és el nostre cas: si (\hat{a}_0, \hat{a}_1) és una solució, també ho serà $(\hat{a}_0, \hat{a}_1 e^{j\theta})$, amb θ qualsevol, prenent un altre origen de temps, $t \rightarrow t + \theta$.
- Podem aprofitar aquesta arbitrarietat per escollir el primer harmònic de $y(t)$ de la forma $a \sin \omega t$ amb $a \geq 0$, és a dir, escollim

$$\hat{y}(t) = \hat{a}_0 + a \sin \omega t$$

i ara sols hi ha tres incògnites.

- És immediat veure que això implica

$$\hat{a}_1 = \frac{a}{2j}$$

i per tant $\text{Re } \hat{a}_1 = 0$.

- Les equacions queden ara en la forma

$$\begin{aligned}G(0)\hat{c}_0(\hat{a}_0, \frac{a}{2j}) + \hat{a}_0 &= 0, \\G(j\omega)\hat{c}_1(\hat{a}_0, \frac{a}{2j}) + \frac{a}{2j} &= 0.\end{aligned}$$

- La primera d'aquestes equacions no depèn de ω , i permet resoldre \hat{a}_0 en funció d' a .
- De tota manera, encara farem una altra simplificació, que és suposar que ψ és una funció senar:

$$\psi(-y) = -\psi(y).$$

- En aquestes condicions, $\hat{a}_0 = 0$ i $\hat{c}_0 = 0$ és una solució de la primera equació, ja que

$$\hat{c}_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \psi(\hat{a}_0 + a \sin \omega t) dt$$

i això dóna zero si posem $\hat{a}_0 = 0$, degut a l'antisimetria de ψ .

- Posant això a la segona equació, obtenim

$$G(j\omega)\hat{c}_1 \left(0, \frac{a}{2j}\right) + \frac{a}{2j} = 0.$$

- El coeficient \hat{c}_1 bé donat per

$$\begin{aligned}\hat{c}_1 \left(0, \frac{a}{2j}\right) &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \psi(a \sin \omega t) \exp(-j\omega t) dt \\ &= -j \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \psi(a \sin \omega t) \sin \omega t dt.\end{aligned}$$

- Definim la funció real

$$\Psi(a) = \frac{\hat{c}_1(0, a/(2j))}{a/(2j)} = \frac{2\omega}{\pi a} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \psi(a \sin \omega t) \sin \omega t dt.$$

- Llavors l'equació per a \hat{c}_1 es pot escriure com $(G(j\omega)\Psi(a) + 1)a = 0$. Suposant $a \neq 0$ obtenim l'equació de balanç harmònic de primer ordre

$$G(j\omega)\Psi(a) + 1 = 0. \quad [\text{BH}]$$

- $\Psi(a)$ s'anomena la **funció descriptiva** de la no-linealitat ψ .

- El mètode de la funció descriptiva es pot aplicar a no-linealitats més complicades (no necessàriament senars o independents del temps). En general, Ψ serà llavors complexa i dependrà tant d' a com d' ω .
- Si l'equació complexa [BH] té una solució (a_s, ω_s) , podem esperar que existeixi una solució exacta amb freqüència propera a ω_s i amplitud al voltant d' a , i si no hi ha solució podem esperar que no existeixi cap solució exacta d'aquestes característiques.
- El *podem esperar* sols pot ser substituït per una afirmació més contundent si fem una anàlisi més detallada, que també ens ha de dir el que s'entén per *proper a*.
- **Exemple.** Sigui la funció signe

$$\psi(y) = \text{sgn}(y) = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \\ -1, & y < 0 \end{cases}$$

Tenim (cal notar que $\Psi(a)$ és independent de ω pels nostres casos, i per tant podem posar, per exemple $\omega = 1$ per calcular la integral; també podem fer un canvi de variable - :))

$$\Psi(a) = \frac{2}{\pi a} \int_0^{\pi} \psi(a \sin \theta) \sin \theta \, d\theta = \frac{2}{\pi a} \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta = \frac{4}{\pi a}.$$

- **Exemple.** Sigui una funció senar que satisfà la condició de sector

$$\alpha y^2 \leq y\psi(y) \leq \beta y^2, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

- Tenim

$$\Psi(a) = \frac{2}{\pi a} \int_0^\pi \psi(a \sin \theta) \sin \theta \, d\theta \geq \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \, d\theta = \alpha,$$

$$\Psi(a) = \frac{2}{\pi a} \int_0^\pi \psi(a \sin \theta) \sin \theta \, d\theta \leq \frac{2\beta}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \, d\theta = \beta,$$

i per tant la funció descriptiva d'una no-linealitat d'aquest tipus satisfà

$$\alpha \leq \Psi(a) \leq \beta, \quad \forall a \geq 0.$$

- Donat que estem considerant $\Psi(a)$ real, l'equació [BH] es pot escriure com

$$(\operatorname{Re}(G(j\omega)) + j\operatorname{Im}(G(j\omega)))\Psi(a) + 1 = 0.$$

- Separant parts real i imaginària tenim

$$1 + \Psi(a)\operatorname{Re}(G(j\omega)) = 0, \quad [\text{BH1}]$$

$$\operatorname{Im}(G(j\omega)) = 0. \quad [\text{BH2}]$$

- Donat que [BH2] és independent d' a , es pot solucionar per obtenir les possibles freqüències. Això és independent de la no-linealitat, que sols determina, per a cada ω i solucionant [BH1], l'amplitud de les oscil·lacions.
- **Exemple.** Sigui $G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$. És immediat veure que $\operatorname{Im}(G(j\omega)) = 0$ dóna $\omega = \sqrt{2}$ (sols cal considerar $\omega > 0$). Substituint a [BH1], obtenim $\Psi(a) = 6$.
- Seguint amb l'exemple, si considerem la no-linealitat de signe, tenim $\Psi(a) = \frac{4}{\pi a}$, i això dóna $a = \frac{2}{3\pi}$. Per tant podem dir que el sistema realimentat d'aquesta manera oscil·larà probablement amb una freqüència propera a $\sqrt{2}$ i amb amplitud propera a $\frac{2}{3\pi}$.
- En canvi, si hi posem una no-linealitat senar de sector $[0, 2]$, com que $0 \leq \Psi(a) \leq 2$, no esperem que el sistema sigui capaç de tenir solucions periòdiques.

- **Exemple.** Sigui l'equació de Rayleigh

$$\ddot{z} + z = \epsilon \left(\dot{z} - \frac{1}{3} \dot{z}^3 \right), \quad \epsilon > 0.$$

- Això es pot escriure com

$$\begin{aligned} \ddot{z} - \epsilon \dot{z} + z &= \epsilon u, \\ u &= -\frac{1}{3} \dot{z}^3. \end{aligned}$$

- La primera equació defineix el sistema lineal. Agafant $y = \dot{z}$ com a sortida la funció de transferència és

$$G(s) = \frac{\epsilon s}{s^2 - \epsilon s + 1},$$

i la no-linealitat és $\psi(y) = \frac{1}{3} y^3$.

- La funció descriptiva d'aquesta no-linealitat és

$$\Psi(a) = \frac{2}{3\pi a} \int_0^\pi (a \sin \theta)^3 \sin \theta \, d\theta = \frac{a^2}{4},$$

i la funció de transferència sobre l'eix imaginari és

$$G(j\omega) = \frac{j\epsilon\omega(1 - \omega^2 + j\epsilon\omega)}{(1 - \omega^2)^2 + \epsilon^2\omega^2}.$$

- L'única solució positiva de $\text{Im}(G(j\omega)) = 0$ és $\omega = 1$.
- Per a $\omega = 1$, $1 + \Psi(a)\text{Re}(G(j \cdot 1)) = 0$ dóna $a = 2$.
- Per tant esperem que l'equació de Rayleigh tingui una solució de període proper a $T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$ i amb amplitud 2.

- Anem ara a la justificació del mètode de la funció descriptiva. Per fer-ho, ens limitarem a no-linealitats que satisfacin les **dues** condicions següents:
 - no-linealitats senars,
 - no-linealitats amb pendent fitat entre α i β :

$$\alpha(y_2 - y_1) \leq \psi(y_2) - \psi(y_1) \leq \beta(y_2 - y_1).$$

- Això no és el mateix que la condició de sector, però es pot veure que si es satisfan les dues condicions anteriors la no-linealitat pertany al sector $[\alpha, \beta]$, i per tant la seva funció descriptiva satisfà $\alpha \leq \Psi(a) \leq \beta$.
- Estudiarem l'existència de solucions periòdiques de mitja ona, és a dir, solucions periòdiques amb tant sols harmònics senars; això és raonable degut a la forma de ψ .
- Si, tal com ja hem fet, escollim l'origen temporal de manera que la fase del primer harmònic sigui zero, tindrem

$$y(t) = a \sin \omega t + y_h(t),$$

on $y_h(t)$ conté tots els harmònics (senars) superiors.

- Ara tenim

$$a_1 = \frac{a}{2j}$$

$$c_1 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} \psi(a \sin \omega t + y_h(t)) \exp(-j\omega t) dt.$$

- El balanç harmònic per a $k = 1$ és $G(j\omega)c_1 + a_1 = 0$.
- Si definim

$$\Psi^*(a, y_h) = \frac{c_1}{a_1} = j \frac{2\omega}{\pi a} \int_0^{\pi/\omega} \psi(a \sin \omega t + y_h(t)) \exp(-j\omega t) dt,$$

podem re-escriure això com

$$\frac{1}{G(j\omega)} + \Psi^*(a, y_h) = 0.$$

- Definint $\delta\Psi = \Psi(a) - \Psi^*(a, y_h)$, podem posar finalment

$$\frac{1}{G(j\omega)} + \Psi(a) = \delta\Psi.$$

- Aquesta és una equació exacta, i el que volem fer és trobar fites sobre $\delta\Psi$.
- Emprant les fites sobre la derivada, definim

$$\rho(\omega) = \inf_{k>1; k \text{ senar}} \left| \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{1}{G(jk\omega)} \right|.$$

- Sigui $\Omega = \{\omega \mid \rho(\omega) > \frac{1}{2}(\beta - \alpha)\}$. En qualsevol subconjunt Ω' de Ω definim

$$\sigma(\omega) = \frac{\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)^2}{\rho(\omega) - \frac{\beta - \alpha}{2}}.$$

- **Lema.** Sota les condicions esmentades

$$\frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} y_h^2(t) dt \leq \left(\frac{2\sigma(\omega)a}{\beta - \alpha} \right)^2, \quad \forall \omega \in \Omega'.$$

A més, $|\delta\Psi| \leq \sigma(\omega), \forall \omega \in \Omega'$.

- Finalment, és possible establir un resultat (Teorema 10.9 de Khalil) que indica
 - Per a quines freqüències no pot haver-hi solucions de mitja ona.
 - Condicions que ens permeten assegurar l'existència d'una solució periòdica

$$y(t) = a \sin \omega t + y_h(t)$$

amb y_h satisfent la fita del Lema.

- **Exercicis.** Repassar l'exemple **10.24** de Khalil.