

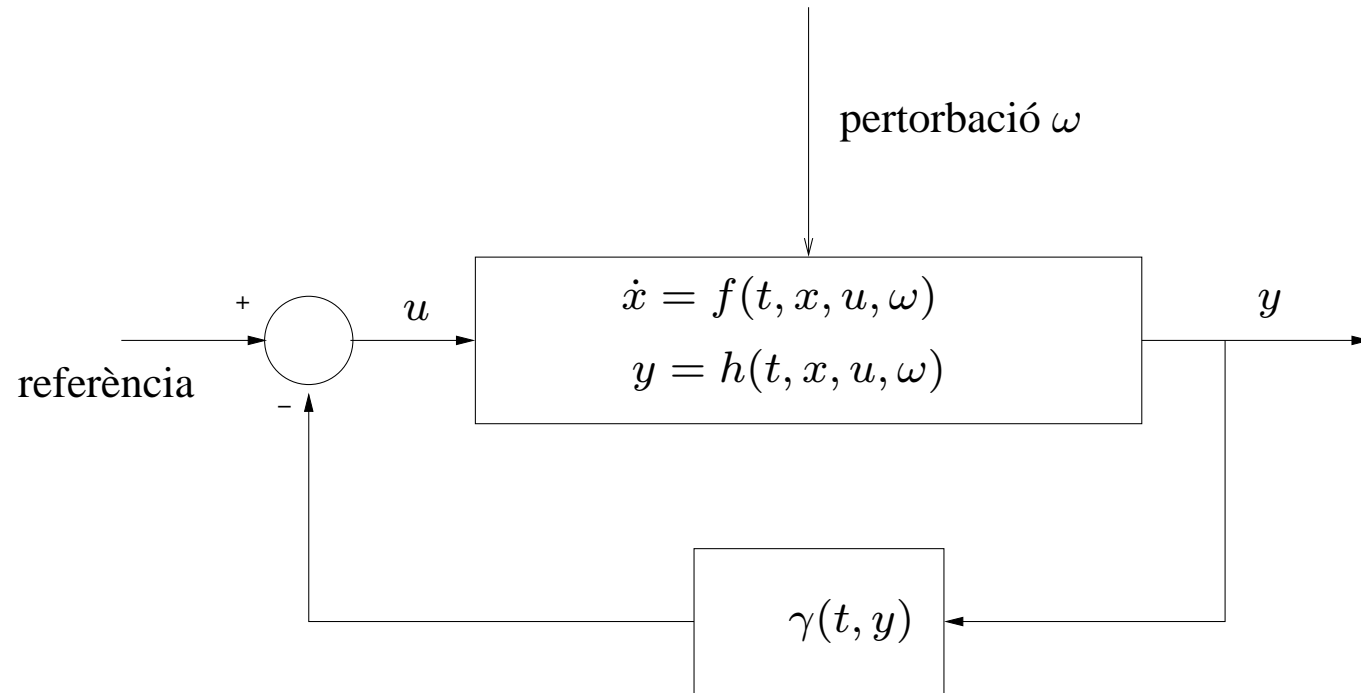
Control realimentat

Estabilització, regulació i programació de guanys

Capítol 11 de Khalil, pàgines 479-518

Problemes de control

- Sistema de control (estàtic) general



- Tasques de control: estabilització, seguiment de senyals, reduït o esmorteïment de pertorbacions.
- Realimentació d'estat: totes les variables d'estat es poden utilitzar per realimentar ($y = x$).
- Realimentació de sortida: ($y \neq x$).

- Lligams que donen lloc a compromisos i requeriments extra:
 - Resposta transitòria en problemes d'estabilització i regulació amb certs requeriments.
 - Magnitud d' u limitada.
 - Temps de retard en el càlcul de $K(t, y)$ o en la mesura de y .
 - Quantització dels valors d' u i d' y .
- Incertesa en el coneixement de f i h : s'intenta dissenyar K que satisfaci tots els requeriments per a totes les f i h dins d'un cert conjunt.
 - **Control robust:** tots els models es suposen pertorbacions d'un model donat (*model nominal*), dins una certa *bola d'incertesa*.
 - **Control adaptatiu:** tots els models es suposen variacions d'un donat, però amb paràmetres diferents. Les mesures d' y intenten llavors esbrinar els valors d'aquests paràmetres desconeguts.
 - La teoria de control robust proporciona resultats i mètodes molt potents, especialment per al control de sistemes lineals (H_∞ control).
 - El control adaptatiu introdueix en general controls no lineals, fins i tot per a sistemes originalment lineals.

- Suposem un sistema sense pertorbacions externes:

$$\dot{x} = f(t, x, u)$$

- El problema de l'estabilització per realimentació d'estat és trobar

$$u = \gamma(t, x)$$

tal que $x = 0$ és un punt d'equilibri uniformement asimptòticament estable del sistema en llaç tancat

$$\dot{x} = f(t, x, \gamma(t, x)).$$

- Una vegada sabem com resoldre aquest problema, podem estabilitzar qualsevol punt p amb el canvi de variables $\tilde{x} = x - p$. A més, p no té que ser necessàriament un punt d'equilibri del sistema en llaç obert ($f(t, p, 0) \neq 0$ en general).

- El control $u = \gamma(t, x)$ s'anomena estàtic donat que u no té *memòria* de x : u depèn sols del valor de x en t .
- Diem que tenim una **realimentació d'estat dinàmica** si

$$u = \gamma(t, x, z)$$

on z obeeix una equació diferencial

$$\dot{z} = g(t, x, z).$$

- Aquest és el cas del **control integral** o del control adaptatiu.

- El problema de l'estabilització per realimentació de sortida estàtica és trobar

$$u = \gamma(t, y)$$

tal que $x = 0$ és un punt d'equilibri uniformement asimptòticament estable del sistema en llaç tancat

$$\dot{x} = f(t, x, \gamma(t, y)).$$

- De la mateixa manera, l'estabilització per realimentació de sortida dinàmica vol trobar

$$\begin{aligned} u &= \gamma(t, y, z), \\ \dot{z} &= g(t, y, z), \end{aligned}$$

de manera que $(x = 0, z = 0)$ sigui uniformement asimptòticament estable.

- La realimentació de sortida dinàmica és més habitual que la realimentació d'estat dinàmica, donat que la manca de mesures sobre alguns dels estats es compensa amb el disseny d'**observadors**, que són sistemes dinàmics acoblats al sistema original que estimen les variables del mateix.

- El cas lineal és

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du.\end{aligned}$$

- La realimentació d'estat estàtica $u = Kx$, on K s'anomena **guany del controlador**, preserva la linealitat del sistema en llaç tancat

$$\dot{x} = (A + BK)x.$$

- L'origen del sistema realimentat és asimptòticament estable si $A + BK$ és Hurwitz. Si el sistema (A, B) és controlable hi ha algorismes molt eficients (fórmula d'Ackermann) per triar K de manera que els pols en llaç tancat estiguin on volguem.
- Si sols és possible realimentació de sortida, es pot dissenyar un controlador-observador

$$\begin{aligned}u &= K\hat{x}, \\ \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + H(C\hat{x} + Du - y),\end{aligned}$$

on H , el **guany de l'observador**, és tal que $A + HC$ és també Hurwitz.

- Per als sistemes no lineals el tema és molt més complicat. Hi ha dos camins fonamentals, que es basen en els resultats lineals.
- Linealització aproximada: es linealitzava el sistema al voltant de l'origen, o d'un punt d'equilibri (x^*, u^*) qualsevol, i es dissenya un controlador per a aquest sistema lineal.
- Linealització exacta: mitjançant realimentació (d'estat, però pot ser també de sortida) i un canvi de variables

$$z = T(x), \quad u = \gamma(x) + v,$$

on T és (localment) un difeomorfisme i v és el nou control, es converteix el sistema

$$\dot{z} = Az + Bv.$$

- La linealització aproximada es basa en el mètode indirecte de Lyapunov. El seu problema és que, si no hi ha valors propis del Jacobià de la linealització amb part real zero, el mètode sols estableix "l'equivalència" dels sistemes al voltant del punt d'equilibri, i no cal esperar un control vàlid per a una regió de condicions inicials predeterminada.
- La linealització aproximada es pot millorar mitjançant la **programació de guanys**: es linealitzava el sistema al voltant d'una successió de punts d'equilibri, es dissenyen controladors per a cada punt i s'interpolen segons la proximitat als diversos punts d'equilibri.

- La linealització exacta no té aquest problema, però es basa en un coneixement **exacte** dels paràmetres del sistema. Com que el sistema real tindrà uns paràmetres diferents dels nominals, haurem dissenyat un controlador exponencialment estable per a un sistema que és una pertorbació del sistema al que l'aplicarem. La validesa del mètode es basa en la teoria de Lyapunov per a sistemes pertorbats (capítol 5 de Khalil).
- **Exemple.**

$$\dot{x} = x^2 + u.$$

- Linealització aproximada al voltant de $x = 0, u = 0$:

$$\dot{x} = u,$$

que s'estabilitza amb $u = -kx, k > 0$. El sistema original amb aquest control és $\dot{x} = x^2 - kx$ i, augmentant k , podem augmentar la regió d'atracció de l'origen. Cap valor de k , però, assoleix estabilització global.

- Linealització exacta (en aquest cas no cal difeomorfisme): $u = -x^2 - kx, k > 0$. Això resulta en el sistema

$$\dot{x} = -kx$$

que és globalment estable. Això es perd, però, si s'aplica a un sistema lleugerament pertorbat, com ara $\dot{x} = 1.1x^2 + u$ (tornem a tenir el mateix problema que amb la linealització aproximada).

- El darrer problema general que veurem és el de **seguiment de senyals en presència de pertorbacions externes**.
- Tenim

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x, u, \omega), \\ y &= h(t, x, u, \omega),\end{aligned}$$

on ω pertany a un cert conjunt Ω , i un senyal de referència $y_R(t)$.

- L'objectiu és que $e(t) \equiv y(t) - y_R(t) \sim 0, \forall t \geq t_0$. Com que això és impossible sense posar $x(t_0)$ de tal manera que $y(t_0)$ ja estigui prop de $y_R(t_0)$, és més raonable demanar (**rebuig asimptòtic de la pertorbació**):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0, \quad \text{per a totes les } \omega \in \Omega.$$

- Això és impossible per a pertorbacions ω generals, i normalment sols es pot aconseguir l'**atenuació asimptòtica de la pertorbació**:

$$\|e(t)\| \leq \epsilon, \quad \forall t \geq T, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

on ϵ és petit. Això també admet la variant $\|e\| \leq k\|\omega\| + \epsilon$, amb una norma qualsevol.

Estabilització

- Mostrarem les idees fonamentals de l'estabilització per linealització aproximada amb l'exemple del pèndol:

$$\ddot{\theta} = -a \sin \theta - b\dot{\theta} + cT,$$

on $a = g/l > 0$, $b = k/m \geq 0$, $c = 1/(ml^2) > 0$, θ és l'angle amb la vertical i T és el parell de forces que apliquem com a control.

- Suposem que volem estabilitzar el pèndol en un angle $\theta = \delta$. El canvi de variables

$$x_1 = \theta - \delta, \quad x_2 = \dot{\theta}$$

ens dóna

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -a \sin(x_1 + \delta) - bx_2 + cT.$$

- Al punt d'equilibri $x^* = (\delta, 0)$ li correspon un valor en equilibri del parell, T^* , donat per

$$T^* = \frac{a}{c} \sin \delta.$$

- Introduint la nova variable de control $u = T - T^*$, ens queda

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a(\sin(x_1 + \delta) - \sin \delta) - bx_2 + cu.\end{aligned}$$

- Això ja verifica $f(x = 0, u = 0) = 0$. Linealitzant obtenim $\dot{x} = Ax + Bu$, amb

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos \delta & -b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}.$$

- Si prenem $K = (k_1 \quad k_2)$, és fàcil veure que $A + BK$ és Hurwitz si $k_1 < \frac{a}{c} \cos \delta$, $k_2 < \frac{b}{c}$, i el control és, en termes de les variables originals (que són les que es mesuren)

$$T = T^* + k_1(\theta - \delta) + k_2\dot{\theta}.$$

Això és un control PD (proporcional+derivatiu).

- Com que $A + BK$ és Hurwitz, podem calcular una funció de Lyapunov $V(x) = x^T P x$ solucionant l'equació de Lyapunov

$$P(A + BK) + (A + BK)^T P = -Q$$

per a $Q^T = Q > 0$ qualsevol. Calculant llavors \dot{V} amb la dinàmica no lineal es pot llavors estimar la conca d'atracció d'aquest control.

Control integral

- En l'exemple del pèndol hem regulat el punt $\theta = \delta$ fent una translació. En presència de paràmetres desconeguts, però, això és poc útil.
- El control calculat és

$$T = T^* + Kx.$$

Tant $T^* = \frac{a}{c} \sin \delta$ com Kx depenen dels paràmetres del sistema. El terme de realimentació, Kx , pot ser dissenyat, però, de manera que sigui robust a àmplies variacions dels paràmetres.

- El terme T^* és, però, molt més sensible. Si T^* es calcula a partir de valors nominals a_0 , c_0 , el sistema s'estabilitzarà de fet en

$$\sin \theta^* = \frac{c}{a} T^* = \frac{a_0 c}{a c_0} \sin \delta$$

i tenim llavors que $\theta^* = \delta$ sols si $\delta = 0$ o $\delta = \pi$ (els punts d'equilibri en llaç obert).

- El control integral proporciona un camí per no haver de calcular T^* a partir dels paràmetres. Ho veurem amb el mateix exemple.

- Si prenem $x_1 = \theta - \delta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $y = x_1$, $u = T$ tenim

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -a \sin(x_1 + \delta) - bx_2 + cu,$$

$$y = Cx = x_1 \equiv e,$$

on e és l'error i $C = (1 \ 0)$.

- Si volem seguir la referència d'error zero, $y_R = 0$, el punt d'equilibri desitjat és

$$x^* = (0 \ 0), \quad u^* = \frac{a}{c} \sin \delta.$$

- Augmentem ara el sistema amb un **integrador de l'error**

$$\dot{\sigma} = e = x_1,$$

on σ té un valor d'equilibri σ^* no fixat per nosaltres.

- Linealitzem ara al voltant de $\xi^* = (x^* \ \sigma^*)$, u^* (fixem-nos que el camp vectorial total no depèn de σ^*), i ens queda

$$\dot{\xi} = \mathcal{A}\xi + \mathcal{B}v$$

on $v = u - u^*$ i

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Si prenem $K = (k_1 \ k_2 \ k_3)$, resulta que $\mathcal{A} + \mathcal{B}K$ és Hurwitz si

$$b - k_2c > 0, \quad (b - k_2c)(a \cos \delta - k_1c) + k_3c > 0, \quad -k_3c > 0.$$

- Encara que no coneguem exactament els valors d' $a > 0$, $b \geq 0$, $c > 0$, si sabem que $a \leq \rho_q$, $c \geq \rho_2$, podem assegurar Hurwitz escollint

$$k_2 < 0, \quad k_3 < 0, \quad k_1 < -\frac{\rho_1}{\rho_2} \left(1 + \frac{k_3}{k_2\rho_1} \right).$$

- El control resultant és

$$T = k_1(\theta - \delta) + k_2\dot{\theta} + k_3\sigma$$

on $\dot{\sigma} = \dot{\theta} - \dot{\delta}$. Això és el PID (proporcional+integral+derivatiu).

- Fixem-nos que no calculem T^* . La clau del control integral és que el control força la convergència cap un punt d'equilibri, i l'equació $\dot{\sigma} = \dot{\theta} - \dot{\delta}$ sols té $\theta = \delta$ com a equilibri.
- Els paràmetres canvians sols afecten el valor de σ^* .
- Els exemples que hem presentat, tant per al cas PD com per al PID, es poden tractar també si fem realimentació de sortida, introduint els corresponents observadors (veure **11.2** de Khalil).
- **Programació de guanys.** Veure secció **11.3** de Khalil. La justificació teòrica requereix teoria de pertorbacions singulars.
- **Exercicis:** fer **11.3** i **11.5** de Khalil.